

流体力学基础

流体的运动特性可用流速、加速度等物理量来表征,这些物理量通称为流体的运动要素。流体力学的基本任务就是研究流体的运动要素随时间和空间变化的规律,并建立它们之间的关系式。流体运动与其他物质运动一样,都遵循物质运动的普遍规律,如质量守恒定律、能量守恒定律和动量定理等。

本章主要介绍流体力学的基础知识,并将其运用到流体运动这类物理现象中,推导出流体力学中的几个重要的基本方程:连续性方程、能量方程和动量方程。这些方程是分析解决流体流动问题的基础。

2.1 描述流体运动的两种方法及流动

2.1.1 描述流体运动的两种方法

在自然界和生产实践中存在着各种各样的流体流动问题,如江河中水的流动、空气绕过建筑物的流动、各种工业管道中流体的流动等。一般而言,将充满流体质点的整个流动空间统称为流场(flow field)。

描述流体运动也就是要表达速度、加速度、密度、压强、动能、动量等流动参数在各个不同空间位置上随时间连续变化的规律。流体的运动可以用拉格朗日法和欧拉法来描述。

1. 拉格朗日法

拉格朗日法着眼于研究流体中各质点的流动情况,跟踪流场中的每一个流体质点,并观察与分析该质点的运动,然后将所有质点的运动综合起来以得到整个流体的运动规律。

流体质点的空间位置为

$$\left. \begin{aligned} x &= x(a, b, c, t) \\ y &= y(a, b, c, t) \\ z &= z(a, b, c, t) \end{aligned} \right\} \quad (2-1)$$

式中, (a, b, c) 为在 t 时刻质点所在的空间位置坐标, a, b, c, t 称为拉格朗日数。所以,任何质点在空间的位置 (x, y, z) 都可看作是 (a, b, c) 和时间 t 的函数。

流体质点在 x, y, z 三个坐标方向上的速度分量为

$$\left. \begin{aligned} u_x &= \frac{\partial x}{\partial t} \\ u_y &= \frac{\partial y}{\partial t} \\ u_z &= \frac{\partial z}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (2-2)$$

在流场中有无限多个流体质点,要想跟踪其中的每一个流体质点的运动是非常困难的,因此,在工程流体力学中很少用拉格朗日法来描述流场。

2. 欧拉法

在工程实际应用中,通常只是关心流场中某个确定位置的流动参数的变化,如自来水或煤气管道上某处的流量、压强等。欧拉法就是基于这个思想提出的,即着眼于研究流场中固定空间或固定点上流体的运动要素随时间变化的规律。速度是空间坐标和时间的函数。

$$\left. \begin{aligned} u_x &= u_x(x, y, z, t) \\ u_y &= u_y(x, y, z, t) \\ u_z &= u_z(x, y, z, t) \end{aligned} \right\} \quad (2-3)$$

式中, x, y, z, t 为欧拉变量。

欧拉法在流体力学中被广泛采用。应当指出的是,分别采用拉格朗日法和欧拉法描述流体运动时,只是着眼点不同,在本质上并没有差别。因此,对于同一个问题,用两种方法描述的结果应该是一致的。

2.1.2 流动的基本概念

1. 流线和迹线

尽管流体的流动是十分复杂的,但是仍然可以定义一些概念来对流场进行形象化的几何描述。

1) 流线

流线(stream line)是表示某一瞬时流体各点流动趋势的曲线,曲线上任意一点的切线方向与该点的流速方向重合。

在流场中任取一点(如点 1,见图 2-1),先绘出某时刻通过该点的流体质点的流速矢量 u_1 ,再画出距点 1 很近的点 2 在同一时刻通过该处的流体质点的流速矢量 u_2 ,如此继续下去,得到一折线 1234...;若各点无限接近,则其极限就是该时刻的流线。

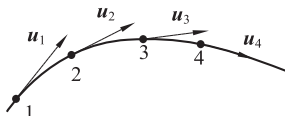


图 2-1 流线

流线是欧拉法描述流场的几何手段,具有以下性质:

(1)除了在驻点(stagnation point,速度为零的点)和奇点(singularity,速度为无穷大的点)处外,流线只能是光滑的直线或曲线,不能是折线。流线的这种性质是比较容易理解

的。因为除了在驻点和奇点处外,在同一点处只能存在一个速度,所以流线就必须是光滑的。

(2)除了在驻点和奇点处外,两条流线不能相交。因为如果两条流线相交,那么在交点处将存在两个速度,这是不可能的。

(3)流线簇的疏密反映了速度的大小(流线密集的地方,流速大;流线稀疏的地方,流速小)。

2) 迹线

迹线(path line)是指某一质点在某一时段内的运动轨迹线。它用来描述流场中同一质点在不同时刻的运动情况。很显然,迹线是拉格朗日法描述流场的几何手段。

恒定流时,流线与迹线相重合。

2. 流管、流束和总流

(1)流管(stream tube)。某一时刻在流场中作一条非流线的封闭曲线,通过这条曲线上各点的流线所组成的管状表面称为流管。

(2)流束(stream filament)。流管中的流体称为流束。当封闭的曲线为微元曲线时,流束称为微元流束,简称元流,其极限为一根流线。

按照流线不能相交的特性,微元流束内的液体不会穿过流管的管壁向外流动,流管外的液体也不会穿过流管的管壁向流束内流动。由于微元流束的横断面的面积很小,因而其过流断面上各运动要素的分布可看成是均匀的。

(3)总流(total flow)。水流的整体或全部元流的汇合称为总流。也就是说,一定大小尺寸的实际水流就是总流。总流可以看成是由无限多个微小流束组成的。

3. 过流断面、湿周和水力半径

(1)过流断面(cross section)。流场中与流线垂直的断面称为过流断面。当流线互相平行时,过流断面为平面,否则就为曲面,但必须与流线垂直。以后如不加以说明,所说断面均指过流断面。

(2)湿周(wetted perimeter)。过流断面上流体与固体壁面接触的周界部分称为湿周,以 χ 表示。

(3)水力半径(hydraulic radius)。过流断面面积与湿周之比称为水力半径,以 R 表示。

$$R = \frac{A}{\chi} \quad (2-4)$$

即水力半径的大小表示在过水断面相等的条件下,湿周对水流阻力的影响程度。水力半径越大,相同过水断面下,周界对水流阻力越小。

4. 流量和断面平均流速

(1)流量(flow rate)。流量是指单位时间流经过流断面的流体数量,可表示为体积流量 Q 和质量流量 M ,常用单位为 m^3/s 和 kg/s 。

微元流束的流量以 dQ 表示。因为微元流束的过流断面与速度方向垂直,所以其过流断面面积 dA 与速度 u 的乘积正是单位时间内通过此过流断面的体积流量,即

$$dQ = u dA \quad (2-5)$$

总流的流量则为同一过流断面上各个微元流束的流量之和,即

$$Q = \int dQ = \int_A u dA \quad (2-6)$$

(2)断面平均流速(average velocity)。一般情况下,过流断面上各点的流速是不相等的,但工程上为了计算方便,在流量不变的前提下假定断面各点速度相等,即取过流断面上流速的平均值,过流断面上流速的平均值称为断面平均流速。

$$v = \frac{Q}{A} = \frac{\int_A u dA}{A} \quad (2-7)$$

2.1.3 流动的分类

1. 一元流动、二元流动和三元流动

在描述流动的欧拉法中,任意一个流动参数是时间和空间坐标 (x, y, z, t) 的函数,但是在有些情况下,流动参数可能只与这四个变量中的部分变量有关,因此可以根据流动参数与哪些变量有关对流动进行分类。

根据流动参数与哪些空间坐标有关,将流动分为一元流动、二元流动和三元流动。如果流动参数与三个空间坐标有关,则称其为三元流动,如大气层中风的流动。三元流动是最一般的流动。如果流动参数与两个空间坐标有关,则称其为二元流动。二元流动是平面流动,如将流体绕过圆柱的流动假想为绕过无限长圆柱的流动就是二维流动。如果流动参数只与一个空间坐标有关,则称其为一元流动。一般的工程应用中的一元流动为有压管道流动,如自来水管道中的水流为沿管道轴线的一元流动。

2. 恒定流动与非恒定流动

如果任意一个流动参数只是空间坐标 (x, y, z) 的函数而与时间 t 无关,或者说流动参数不随时间变化,则称此种流动为恒定流动(constant flow),否则为非恒定流动(inconstant flow)。对于恒定流动,欧拉变量中没有时间 t ,式(2-3)简化为

$$\left. \begin{aligned} u_x &= u_x(x, y, z) \\ u_y &= u_y(x, y, z) \\ u_z &= u_z(x, y, z) \end{aligned} \right\} \quad (2-8)$$

在生活中或工程中,常常遇到恒定流动。例如,依靠水泵的排水系统,当水泵的工况稳定时,管道中的流动就是恒定流动;而在水泵加速或停机减速的过程中,管道中的流动就是非恒定流动。又如水箱出流(见图 2-2),若不断地向水箱中补水以保持水箱中的自由表面的高度不变,则该出流为恒定流动;若不向水箱中补水,而将水箱中的水放空,则该出流为非恒定流动。

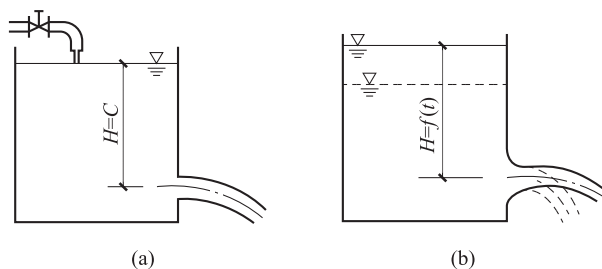


图 2-2 恒定流动和非恒定流动

3. 均匀流动与不均匀流动

根据流速是否随流向变化,流动可分为均匀流动和不均匀流动,如图 2-3 所示。不均匀流动按流速随流向变化的缓急不同又可分为渐变流动和急变流动。

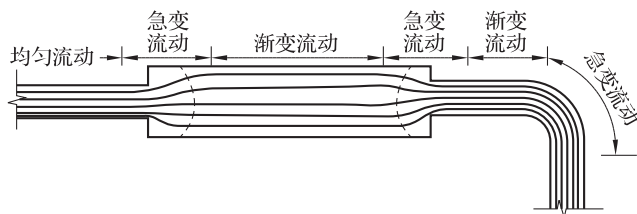


图 2-3 均匀流动与不均匀流动

质点流速的大小和方向均不变的流动叫均匀流动。均匀流的流线是相互平行的直线,因而它的过流断面是平面,且过流断面上的压强分布服从于流体静力学规律,即同一过流断面上的测压管的水头是常数,如图 2-4 所示。

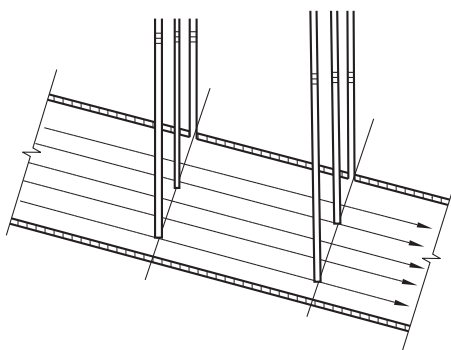


图 2-4 均匀流过流断面的压强分布

在断面不变的直管中的流动是均匀流动最常见的例子。许多流动情况虽然不是严格的均匀流动,但接近于均匀流动,这种流动称为渐变流动。渐变流的流线近乎平行于直线,流速沿流向变化所形成的惯性小,可忽略不计。过流断面可认为是平面,在过流断面上,压强分布也可认为服从于流体静力学规律,也就是说,渐变流动可近似地按均匀流动处理。

直径沿程变化不大的圆锥管内的流动可认为是渐变流动。管径突然扩大或缩小处的流动可以认为是急变流动。

4. 有压流动与无压流动

根据液体在流动过程中有无自由表面,可将流动分为有压流动和无压流动。

液体在流动过程中,其整个周界都与固体壁面接触,而无自由表面的流动称为有压流动。它主要依靠压力作用,其过流断面上任意一点的动水压强一般与大气压强不等。例如,自来水管和供热管道中水的流动均为有压流动。

若液体在流动过程中,其一部分周界与固体壁面接触,另一部分周界与空气接触,具有自由表面的流动,称为无压流动。它主要依靠重力作用,因无压流的液面与大气相通,故又可称为重力流或明渠流。例如,河渠中的水流和污水管中的水流均为无压流。

2.2 流体微团运动的分析

由理论力学可知,刚体的运动可以分解为平移和旋转两种基本运动。流体的运动要比刚体的运动复杂得多,流体微团的基本运动形式有平移运动、变形运动和旋转运动等。其中,变形运动又包括线变形运动和角变形运动两种。

2.2.1 平移运动

为简明起见,先分析流体微团的平面运动,然后再将其结果推广到空间运动的情况。设某时刻 t 在一平面流场中取边长为 dx 和 dy 的矩形流体微团 $ABCD$,其四个角点的速度如图 2-5 所示。由于流体微团各点的速度不同,经过 dt 时段后,其位置和形状都将发生变化。

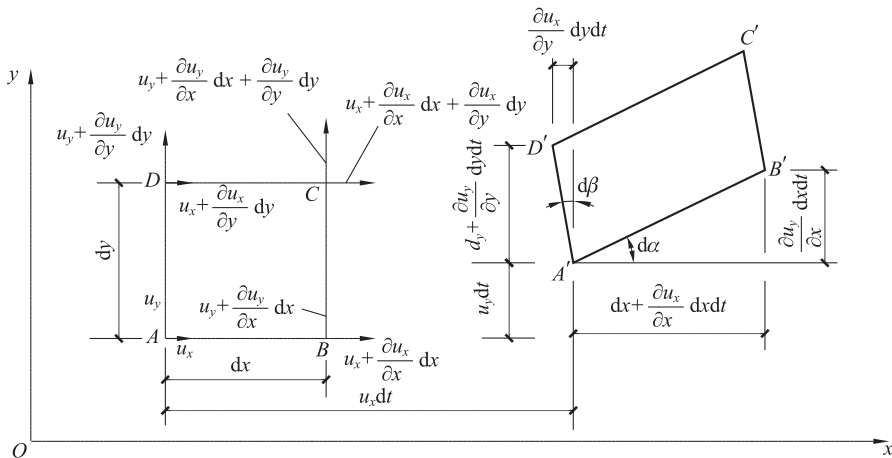


图 2-5 流体微团运动分析

微团上每一点的速度都包含 u_x 、 u_y , 将该速度定义为流体微团的平移运动速度。

2.2.2 变形运动

1. 线变形运动

如图 2-5 所示,若以 A 点为基点, u_x 、 u_y 分别为流体微团在 x 、 y 方向的平移速度,经过 dt 时段后, A 点移动至 A' 点, B 点移动至 B' 点。

因为 B 点相对于 A 点、C 点相对于 D 点在 x 方向上具有相同的速度增量 $\frac{\partial u_x}{\partial x} dx$, 所以经过 dt 时段后, AB 边和 DC 边沿 x 方向的绝对变形(伸长或缩短)均为 $\frac{\partial u_x}{\partial x} dx dt$, 则沿 x 方

向的单位时间、单位长度的线变形速度为 $\frac{\partial u_x}{\partial x}$ 。推广到三元流动的普遍情况,则流体微团的线变形速度为

$$\left. \begin{aligned} \theta_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \theta_y &= \frac{\partial u_y}{\partial y} \\ \theta_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (2-9)$$

2. 角变形运动

如图 2-5 所示,因为 B 点相对于 A 点、 C 点相对于 D 点在 y 方向具有相同的速度增量 $\frac{\partial u_y}{\partial x} dx$,所以经过 dt 时段后, B 点、 C 点沿 y 方向均向上相对移动 $\frac{\partial u_y}{\partial x} dx dt$,由此产生的角变形为

$$d\alpha \approx \tan d\alpha = \frac{\frac{\partial u_y}{\partial x} dx dt}{dx + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx dt} \approx \frac{\partial u_y}{\partial x} dt$$

同样, D 点相对于 A 点、 C 点相对于 B 点在 x 方向具有相同的速度增量 $\frac{\partial u_x}{\partial y} dy$, D 点、 C 点沿 x 方向均相对移动 $\frac{\partial u_x}{\partial y} dy dt$,由此产生的角变形 $d\beta = \frac{\partial u_x}{\partial y} dt$ 。故流体微团在 xOy 平面上的角变形速度 ϵ_z 定义为两条直角边角变形速度的算术平均值,即

$$\epsilon_z = \frac{1}{2} \frac{d\alpha + d\beta}{dt} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right)$$

同理,流体微团在 yOz 及 zOx 平面上的角变形速度分别为 ϵ_x 和 ϵ_y 。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \\ \epsilon_y &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ \epsilon_z &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2-10)$$

2.2.3 旋转运动

定义对角线 AC 绕 z 轴的旋转角速度为流体微团绕 z 轴的旋转角速度 ω_z ,则

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right)$$

同理,流体微团在 yOz 及 zOx 平面上的旋转角速度分别为 ω_x 和 ω_y 。

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \\ \omega_y &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ \omega_z &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2-11)$$

2.3 流体流动的连续性方程

连续性方程是流体力学的基本方程之一,是质量守恒定律在流体力学中的应用。它规定了每一空间点上流体速度分量之间所应满足的关系。

2.3.1 不可压缩流体的连续性微分方程

如图 2-6 所示,在流场中选取边长为 dx 、 dy 、 dz 的正六面体微元控制体。由于流体不可压缩,质量流量平衡条件可用体积流量平衡条件来代替,即在 dt 时段内流入和流出微元控制体的净体积流量为零。

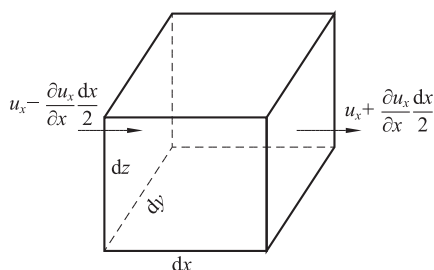


图 2-6 微元控制体的流量平衡

设微元控制体中心点的坐标为 (x, y, z) , 中心点的速度为 u_x, u_y, u_z , 则微元控制体左侧面中心点沿 x 方向的流速为 $u_x - \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{dx}{2}$, 右侧面中心点沿 x 方向的流速为 $u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{dx}{2}$ 。因而, 在 dt 时段内, 沿 x 方向流入和流出微元控制体的净体积流量为

$$\left(u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{dx}{2}\right) dydzdt - \left(u_x - \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{dx}{2}\right) dydzdt = \frac{\partial u_x}{\partial x} dx dy dz dt$$

同理, 在 dt 时段内, 沿 y, z 方向流入和流出微元控制体的净体积流量分别为 $\frac{\partial u_y}{\partial y} dx dy dz dt$ 、 $\frac{\partial u_z}{\partial z} dx dy dz dt$ 。

对于不可压缩流体, 在 dt 时段内, 沿 y, z 方向流入和流出微元控制体的净体积流量之和应为零。

$$\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right) dx dy dz dt = 0$$

即

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad (2-12)$$

这就是不可压缩流体的连续性微分方程, 对恒定流动和非恒定流动都适用。

2.3.2 恒定总流的连续性方程

在总流中, 断面平均流速沿流向变化的问题, 可以由质量守恒定律出发, 通过研究流体

的质量平衡来解决。

在总流中取面积分别为 A_1 和 A_2 的 1、2 两个断面,探讨两个断面间流动空间的质量收支平衡情况,如图 2-7 所示。

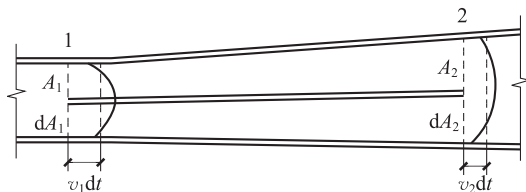


图 2-7 总流质量平衡

设 A_1 的断面平均流速为 u_1 , A_2 的断面平均流速为 u_2 , 则 dt 时段内流入断面 1 的流体质量为 $\rho_1 v_1 A_1 dt = \rho_1 Q_1 dt = M_1 dt$, 流出断面 2 的流体质量为 $\rho_2 v_2 A_2 dt = \rho_2 Q_2 dt = M_2 dt$ 。恒定流时,两断面间流动空间内的质量不变,流动是连续的,根据质量守恒定律,流入断面 1 的流体质量必等于流出断面 2 的流体质量,即 $M_1 dt = M_2 dt$, 消去 dt , 便得出不同断面上密度不相同同时反映两断面间流动空间的质量平衡的连续性方程。

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= M_2 \\ \rho_1 Q_1 &= \rho_2 Q_2 \\ \rho_1 u_1 A_1 &= \rho_2 u_2 A_2 \end{aligned} \right\} \quad (2-13)$$

当流体不可压缩时,密度为常数,即 $\rho_1 = \rho_2$, 则不可压缩流体的连续性方程为

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= Q_2 \\ u_1 A_1 &= u_2 A_2 \end{aligned} \right\} \quad (2-14)$$

式(2-14)表明,在不可压缩流体的一元流动中,任意两个过流断面的断面平均流速与断面面积成反比变化。

上述两个总流的连续性方程[式(2-13)和式(2-14)]是在流量沿程不变的条件导出的。若沿程有流体流入或流出,总流的连续性方程仍然适用,只是形式有所不同。对于图 2-8 所示的情况,有

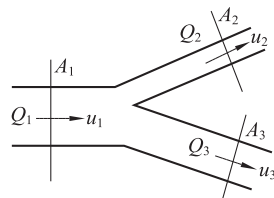


图 2-8 分支管流

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= Q_2 + Q_3 \\ u_1 A_1 &= u_2 A_2 + u_3 A_3 \end{aligned} \right\} \quad (2-15)$$

【例 2-1】 图 2-9 所示的管段, $d_1 = 2.5 \text{ cm}$, $d_2 = 5 \text{ cm}$, $d_3 = 10 \text{ cm}$ 。试求:

- (1) 当流量为 4 L/s 时,各管段的平均流速。
- (2) 转动阀门,使流量增加至 8 L/s 或使流量减少至 2 L/s 时,平均流速的变化情况。

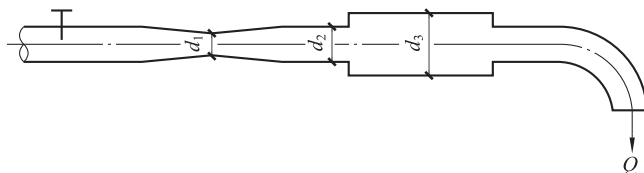


图 2-9 【例 2-1】图

【解】 (1) 根据连续性方程 $Q = u_1 A_1 = u_2 A_2 = u_3 A_3$, 可得

$$u_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{4 \times 10^{-3}}{\frac{\pi}{4} \times (2.5 \times 10^{-2})^2} = 8.15 \text{ (m/s)}$$

$$u_2 = u_1 \frac{A_1}{A_2} = u_1 \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 = 8.15 \times \left(\frac{2.5}{5}\right)^2 = 2.04 \text{ (m/s)}$$

$$u_3 = u_1 \left(\frac{d_1}{d_3}\right)^2 = 8.15 \times \left(\frac{2.5}{10}\right)^2 = 0.51 \text{ (m/s)}$$

(2) 各断面流速比例保持不变, 流量增加至 8 L/s, 即流量增加为原来的 2 倍, 则各段流速也为原来的 2 倍。即

$$u_1 = 16.3 \text{ m/s}, u_2 = 4.08 \text{ m/s}, u_3 = 1.02 \text{ m/s}$$

流量减小至 2 L/s 时, 即流量减小至原来的 1/2, 各流速也为原值的 1/2。即

$$u_1 = 4.08 \text{ m/s}, u_2 = 1.02 \text{ m/s}, u_3 = 0.255 \text{ m/s}$$

【例 2-2】 如图 2-8 所示, 输水管道经三通管分流, 已知体积流量 $Q_1 = 2.6 \text{ m}^3/\text{s}$, $Q_3 = 1.5 \text{ m}^3/\text{s}$, 过流断面面积 $A_2 = 0.2 \text{ m}^2$, 试求断面的平均流速 u_2 。

【解】 由分支管路的连续性方程 $Q_1 = Q_2 + Q_3$, 可得断面的平均流速为

$$u_2 = \frac{Q_2}{A_2} = \frac{Q_1 - Q_3}{A_2} = \frac{2.6 - 1.5}{0.2} = 5.5 \text{ (m/s)}$$

2.4 理想流体的运动微分方程和能量方程

工程实际中, 所有的流体都具有黏性, 但是当流体的黏性力与其他力相比非常小时, 可以忽略流体的黏性, 把实际流体当作理想流体来处理, 这样做可以大大简化流动模型, 降低求解的难度, 从而可以很容易地得出流动规律, 然后再对其进行黏性修正。此外, 理想流体力学也是黏性流体力学的基础。因此, 本节将从比较简单的理想流体运动分析入手, 建立理想流体的运动方程并求解。

2.4.1 理想流体的运动微分方程

讨论理想流体受力及运动之间的动力学关系, 即根据牛顿第二定律, 建立理想流体力学方程。

如图 2-10 所示, 根据牛顿第二定律, 作用在微元六面体上的合外力在某坐标轴方向上的投影的代数和等于此流体微元的质量乘以其在同轴方向上的分加速度。

在 x 轴方向
$$\sum F_x = ma_x$$

可得

$$dG_x + \left(p - \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} dx\right) dydz - \left(p + \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} dx\right) dydz = ma_x$$

因为 $\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{u}}{dt}$, $a_x = \frac{du_x}{dt}$, $a_y = \frac{du_y}{dt}$, $a_z = \frac{du_z}{dt}$, 所以流体微元沿 x 方向的运动方程为

$$\rho f_x dx dy dz - \frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz = \rho dx dy dz \frac{du_x}{dt}$$

整理后得

$$f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{du_x}{dt}$$

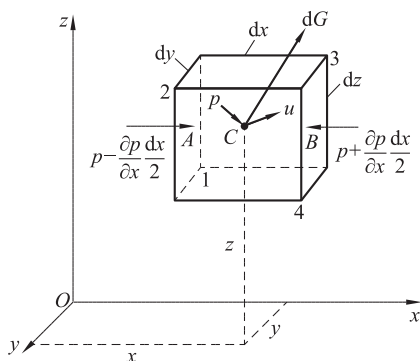


图 2-10 微元六面体受力分析

同理,可得 y 、 z 轴方向的运动方程。

$$\left. \begin{aligned} f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{du_x}{dt} \\ f_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{du_y}{dt} \\ f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{du_z}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (2-16)$$

对于静止流体来说, $u_x = u_y = u_z = 0$, 则式(2-16)变为欧拉平衡微分方程, 即平衡只是运动的特例。

如果把式(2-16)中的加速度展开, 可得

$$\left. \begin{aligned} f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ f_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (2-17)$$

式(2-16)、式(2-17)为理想流体的运动微分方程, 又称欧拉运动微分方程。它描述了作用在理想流体上的力与流体运动加速度之间的关系式, 是研究理想流体各种运动规律的基础, 适用于所有的理想流体的流动问题。

2.4.2 理想流体的能量方程

1. 理想流体运动微分方程积分

式(2-16)方程组为非线性偏微分方程组, 实际求解很困难, 目前只在一些简单的流动情况下对其进行积分, 以求得方程的解析解。其中最常见的是恒定流动的伯努利积分。该积分的前提条件如下:

- (1) 流体是均匀的、不可压缩的, 即 $\rho = C$ 。
- (2) 恒定流动, 即 $\frac{\partial u_x}{\partial t} = \frac{\partial u_y}{\partial t} = \frac{\partial u_z}{\partial t} = 0, \frac{\partial p}{\partial t} = 0$ 。
- (3) 质量力有势, 并以 $W(x, y, z)$ 表示质量力的势函数, 则

$$f_x = \frac{\partial W}{\partial x}, f_y = \frac{\partial W}{\partial y}, f_z = \frac{\partial W}{\partial z}$$

$$dW = \frac{\partial W}{\partial x} dx + \frac{\partial W}{\partial y} dy + \frac{\partial W}{\partial z} dz = f_x dx + f_y dy + f_z dz$$

(4)沿流线积分,由于是恒定流动,流线与迹线重合,则

$$u_x = \frac{dx}{dt}, u_y = \frac{dy}{dt}, u_z = \frac{dz}{dt}$$

在上述四个条件的限制下,将欧拉运动微分方程式(2-16)的三个等式分别乘以 dx 、 dy 、 dz ,然后相加,得

$$(f_x dx + f_y dy + f_z dz) - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) = \frac{du_x}{dt} dx + \frac{du_y}{dt} dy + \frac{du_z}{dt} dz$$

$$dW - \frac{1}{\rho} dp = u_x du_x + u_y du_y + u_z du_z = \frac{1}{2} d(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) = d\left(\frac{u^2}{2}\right)$$

即
$$dW - \frac{1}{\rho} dp - d\left(\frac{u^2}{2}\right) = 0$$

对上式沿一条流线进行积分,最后可得

$$W - \frac{p}{\rho} - \frac{u^2}{2} = C \quad (2-18)$$

若流动在重力场中,作用在流体上的质量力只有重力,所选 z 轴铅垂向上,则质量力为 $X=0, Y=0, Z=-g$,质量力的势函数为

$$dW = Xdx + Ydy + Zdz = -gdz$$

对上式积分得

$$W = -gz$$

将上式代入式(2-18),对单位重量流体而言,可得到

$$z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} = C \quad (2-19)$$

对于同一流线上的任意两点 1、2,有

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g} \quad (2-20)$$

式(2-18)为理想流体运动微分方程沿流线的积分,式(2-19)和式(2-20)为重力场中理想流体沿流线的积分式,称为能量方程。由于元流的过流断面面积无限小,所以沿流线的能量方程也适用于元流。推导能量方程引入的限定条件,即理想流体元流(流线)能量方程的应用条件,归纳起来有理想流体、恒定流动、质量力只有重力、沿元流(流线)积分、不可压缩流体。

2. 能量方程的意义

理想流体元流的能量方程中各项的物理意义和几何意义如下:

1) 物理意义

从物理角度看, z 代表单位重量流体对某基准面具有的位能, $p/\rho g$ 代表单位重力流体的压能, $u^2/2g$ 代表单位重力流体的动能。因此,能量方程的物理意义为:对于重力作用下的恒定不可压缩流体,单位重量流体所具有的位能、动能和压能之和(机械能)沿流线不变。由此可见,能量方程实质就是物理学能量守恒定律在流体力学上的一种表现形式。

2) 几何意义

从几何角度看,能量方程的每一项的量纲与长度相同,都代表某一个高度。 z 代表所研究点相对于某基准面的几何高度,称为位置水头; $p/\rho g$ 代表所研究点处压力大小的高度,称为压强水头; $u^2/2g$ 代表所研究点处速度大小的高度,称为速度水头。通常将位置水头与压强水头之和称为测压管水头,测压管水头与速度水头之和称为总水头。能量方程的几何意义为:对于重力作用下的恒定不可压缩流体,总水头为一常数,或总水头沿流线相等,如图 2-11 所示。

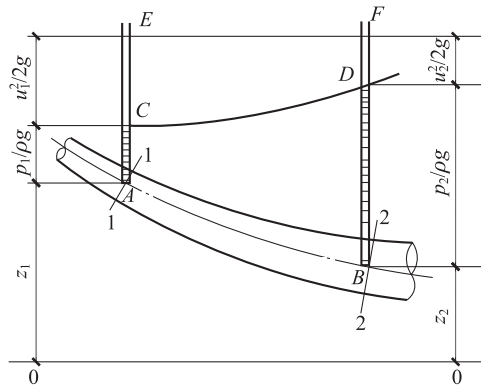


图 2-11 理想流体能量方程的几何意义

式(2-20)确立了一元流动中的动能和势能、流速和压强相互转换的普遍规律,提出了理论流速和压强的计算公式,在水力学和流体力学中有着极其重要的理论分析意义和实际运算作用。

3. 能量方程的应用

现在以毕托管为例说明元流能量方程的应用。

毕托管是广泛用于测量水流和气流流速的一种仪器,如图 2-12 所示。管前端开口 a 正对气流或水流, a 端内部有流体通路与上部 a' 端相通。管侧有多个开口 b ,其内部也有流体通路与上部 b' 端相通。当测定水流时, a' 、 b' 两管水面差 h_v 即反映 a 、 b 两处压差。

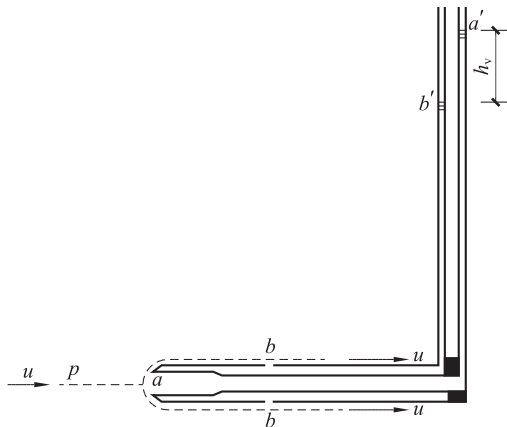


图 2-12 毕托管原理

液体流进 a 端开口,水流最初从开口处流入,沿管上升, a 端受压水柱上升到 a' 点,直至该

处质点的流速降低到零,其压强为 p_a 。然后由 a 分路,流经 b 端开口,流速恢复原有速度 u ,压强也降至原有压强。 b 端受压水柱上升到 b' 点,直至该处质点的流速降低到零,其压强为 p_b 。

沿 ab 流线写出元流能量方程为

$$\frac{p_a}{\rho g} + 0 = \frac{p_b}{\rho g} + \frac{u^2}{2g}$$

得

$$u = \sqrt{2g \frac{p_a - p_b}{\rho g}} \quad (2-21)$$

由管的开口端的液柱高差 h_v 测定 $\frac{(p_a - p_b)}{\rho g}$, 用式(2-22)计算速度。

$$u = \varphi \sqrt{2gh_v} \quad (2-22)$$

式中, φ 为经实验校正的流速系数,它与管的构造和加工情况有关,其值近似等于 1。

【例 2-3】 如图 2-12 所示,用毕托管测定管道中水的流速,测得水柱高差 $h_v = 3 \text{ cm}$ 。 φ 值取 1,求水流速度。

【解】
$$u = \varphi \sqrt{2gh_v} = \sqrt{2g \times 0.03} = 0.767 \text{ (m/s)}$$

2.5 总流的能量方程

实际流体具有黏性,其运动时由于流层间的内摩擦力做功,使得一部分机械能转变为热能而耗散,因而实际流体流动的机械能将沿程减少。根据能量守恒定律,可得实际流体恒定元流的能量方程为

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g} + h'_{w1-2} \quad (2-23)$$

式中, h'_{w1-2} 为单位重量流体沿着流线从 1 点到 2 点的能量损失。

实际工程中需要解决的往往是总流的流动问题,如管路或渠道中的流动。因此,应该将元流的能量方程推广到总流中去。

2.5.1 总流能量方程积分

在图 2-13 所示的总流中,选取两个渐变流断面 1—1 和 2—2。

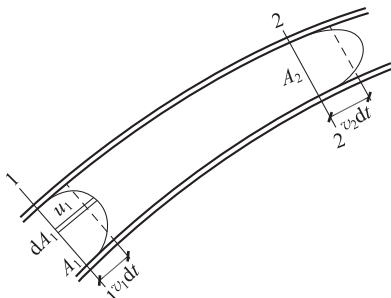


图 2-13 总流能量方程推导

总流既然可以看作是无数元流之和,总流的能量方程就应当是恒定元流能量方程 [式(2-23)] 在两断面范围内的积分,即

$$\int_{A_1} \left(z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} \right) \rho g dQ = \int_{A_2} \left(z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g} \right) \rho g dQ + \int_Q \rho g h'_{w1-2} dQ$$

现将以上各项按能量性质不同分为三种类型,分别讨论各类型的积分。

1. 势能积分

$\int \left(z + \frac{p}{\rho g} \right) \rho g dQ$ 表示单位时间内通过断面的流体势能。由于断面选取在渐变流流段,其断面上的测压管水头为常数,可以提到积分号以外,因而势能积分可以写为

$$\int \left(z + \frac{p}{\rho g} \right) \rho g dQ = \left(z + \frac{p}{\rho g} \right) \rho g Q$$

2. 动能积分

$$\int_A \frac{u^2}{2g} \rho g dQ = \rho g \int_A \frac{u^2}{2g} u dA = \frac{\rho g}{2g} \int u^3 dA$$

$\frac{\rho g}{2g} \int u^3 dA$ 表示单位时间内通过断面的流体动能。由于过流断面的流速 u 分布复杂,不易积分,故采用断面平均流速 v 来代替 u ,即以 $\frac{\rho g}{2g} \int v^3 dA$ 代替 $\frac{\rho g}{2g} \int u^3 dA$ 。但实际上, $\int v^3 dA$ 并不等于 $\int u^3 dA$, 为此,需要乘以修正系数 α 。

$$\alpha = \frac{\int u^3 dA}{\int v^3 dA} = \frac{\int u^3 dA}{v^3 A}$$

α 称为动能修正系数。 α 值根据流速在断面上分布的均匀性来确定。流速分布均匀时, $\alpha=1$; 流速分布越不均匀, α 值越大。在管流的层流流动中, $\alpha=2$; 在湍流流动中, $\alpha=1.05 \sim 1.10$ 。在实际工程计算中,常取 $\alpha=1$ 。

有了动能修正系数,则动能积分可写为

$$\int_A \frac{u^2}{2g} \rho g dQ = \frac{\rho g}{2g} \int u^3 dA = \frac{\rho g}{2g} \int \alpha v^3 dA = \frac{\alpha v^2}{2g} \rho g Q$$

3. 能量损失积分

$$\int_Q \rho g h'_{w1-2} dQ$$

$\int_Q \rho g h'_{w1-2} dQ$ 表示单位时间内流过断面的流体克服 1—2 流段的阻力做功所损失的能量。总流中各元流能量损失也是沿断面变化的。为了计算方便,设 h_{w1-2} 为平均单位能量损失。则

$$\int_Q \rho g h'_{w1-2} dQ = h_{w1-2} \rho g Q$$

现在将以上各个积分值代入原积分式,可得

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_{w1-2} \quad (2-24)$$

式(2-24)就是实际流体恒定总流的能量方程,其每一项的物理意义和几何意义与元流的能量方程类似。

总流的能量方程是在一些限制条件下得到的,应用该方程时需要满足下列限制条件:流体不可压缩;流动是恒定流;质量力只有重力;过流断面上的流动必须是渐变流动;但两过流断面间的流动可以是急变流动。

2.5.2 总流能量方程的应用

总流能量方程在解决流体力学问题上有决定性的作用,它和连续性方程联立,可以全面地解决一元流动的断面流速和压强的计算问题。

一般来讲,实际工程问题不外乎三种类型:一是求流速,二是求压强,三是求流速和压强。求流速是主要的,求压强必须在求流速的基础上,或在流速已知的基础上进行。其他问题,如流量问题、水头问题、动量问题,都是与流速、压强相关联的。

1. 文丘里流量计

文丘里流量计是一种测量管道流量的仪器,是总流能量方程在工程中的典型应用。

文丘里流量计(见图 2-14)由收缩段、喉管及扩散段三部分组成。在收缩段进口前与喉管处安装有测压管或压差计,可以测出两断面的测压管水头差,再根据能量方程便可实现对流体流量的测量。

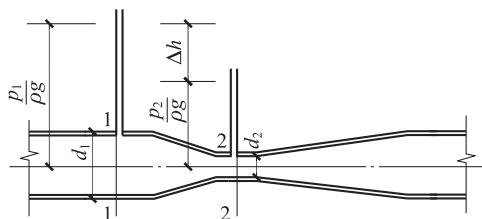


图 2-14 文丘里流量计原理

取 1—1、2—2 两渐变流断面,写出理想流体的能量方程为

$$0 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = 0 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g}$$

移项

$$\frac{p_1}{\rho g} - \frac{p_2}{\rho g} = \frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g} = \Delta h$$

联立连续性方程

$$\frac{\pi}{4} d_1^2 v_1 = \frac{\pi}{4} d_2^2 v_2$$

解出流速为

$$v_1 = \sqrt{\frac{2g\Delta h}{\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4 - 1}}$$

流量为

$$Q = \frac{\pi}{4} d_1^2 v_1 = \frac{\pi}{4} d_1^2 \sqrt{\frac{2g\Delta h}{\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4 - 1}}$$

式中, $\frac{\pi}{4} d_1^2 \sqrt{\frac{2g}{\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4 - 1}}$ 只与管径 d_1 和 d_2 有关,对于一定的流量计,它是一个常数,以 K 表示,即

$$K = \frac{\pi}{4} d_1^2 \sqrt{\frac{2g}{\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4 - 1}} \quad (2-25)$$

则

$$Q = K \sqrt{\Delta h}$$

由于推导过程采用了理想流体的力学模型,求出的流量值较实际为大,为此,乘以 μ 值来修正。 μ 值根据实验确定,称为文丘里流量系数,取值为 0.95~0.98。则

$$Q = \mu K \sqrt{\Delta h} \quad (2-26)$$

【例 2-4】 如图 2-14 所示,设文丘里管的两管直径分别为 $d_1 = 200$ mm, $d_2 = 100$ mm,测得两断面的压强差 $\Delta h = 0.5$ m,流量系数 $\mu = 0.98$,求流量。

【解】

$$\begin{aligned} K &= \frac{\pi d_1^2}{4} \sqrt{\frac{2g}{\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4 - 1}} \\ &= \frac{\pi}{4} \times 0.2^2 \times \sqrt{\frac{2 \times 9.8}{\left(\frac{200}{100}\right)^4 - 1}} = 0.036 \text{ (m}^{2.5}\text{/s)} \end{aligned}$$

$$Q = \mu K \sqrt{\Delta h} = 0.98 \times 0.036 \times \sqrt{0.5} = 0.0249 \text{ (m}^3\text{/s)} = 24.9 \text{ (L/s)}$$

2. 沿程有能量输入或输出的能量方程

式(2-24)是在两过流断面间无其他机械能输入、输出的条件下导出的。如果两过流断面间装有水泵、水轮机或风机等装置,流体将获得或失去能量;若单位重量流体获得或失去的能量为 H ,根据能量守恒原理,则有能量输入或输出的总流能量方程变为

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_{w1-2} \pm H \quad (2-27)$$

式中,“ $-H$ ”为单位重量流体通过水泵时获得的能量;“ $+H$ ”为单位重量流体通过水轮机时失去的能量。

3. 沿程有分流或合流的能量方程

式(2-24)是在两过流断面间无分流或合流情况下导出的。如图 2-15 所示,若 1、2 断面间有分流,纵然分流点是急变流断面,而离分流点稍远的 1—1、2—2 或 3—3 断面都是均匀流或渐变流断面,也可以近似认为各断面通过流体的单位能量在断面上的分布是均匀的。而 $Q_1 = Q_2 + Q_3$,即 Q_1 的流体一部分流向 2—2 断面,一部分流向 3—3 断面。无论流到哪一个断面的流体,在 1—1 断面上单位重量流体所具有的能量都是 $z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g}$,只不过流到 2—2 断面时产生的单位重量能量损失是 h_{w1-2} ,而流到 3—3 断面时产生的单位能量损失是 h_{w1-3} 。

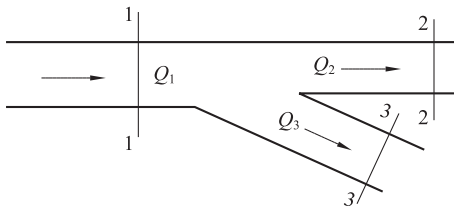


图 2-15 流动分流

能量方程是两断面间单位能量的关系,因此可以直接建立 1—1 断面和 2—2 断面的能量方程。

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_{w1-2}$$

1—1 断面和 3—3 断面的能量方程为

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_3 + \frac{p_3}{\rho g} + \frac{\alpha_3 v_3^2}{2g} + h_{w1-3}$$

【例 2-5】 如图 2-16 所示,用直径 $d=100$ mm 的管道从水箱中引水。如水箱中的水面恒定,水面高出管道出口中心的高度 $H=4$ m,假设管道的损失沿管长均匀发生, $h_w=3v^2/2g$ 。试求:

- (1) 通过管道的流速 v 和流量 Q 。
- (2) 管道中点 M 的压强 p_M 。

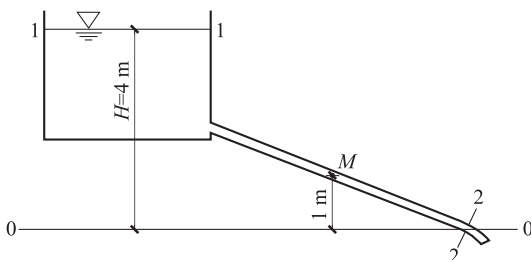


图 2-16 【例 2-5】图

【解】 水体是从水箱水面经管道流入大气中的,它和大气相接的断面是水箱水面 1—1 和出流断面 2—2。基准水平面 0—0 通过出口断面的形心(流动的最低点)。

(1) 写 1—1、2—2 断面的能量方程。

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_{w1-2}$$

式中, $z_1=4$ m; $z_2=0$ m; $\frac{p_1}{\rho g}=0$; $\frac{p_2}{\rho g}=0$; 1—1 断面的速度水头即水箱中的速度水头,对于管流,常称之为行近流速水头。当水箱断面的面积比管道断面的面积大得多时,行近流速较小,行近流速水头更小,一般可忽略不计,则

$$\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} \approx 0, \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} = \frac{\alpha v^2}{2g}, h_{w1-2} = 3 \frac{v^2}{2g}$$

代入能量方程

$$4 + 0 + 0 = 0 + 0 + \alpha \frac{v^2}{2g} + 3 \frac{v^2}{2g}$$

取 $\alpha=1$, 则 $\frac{v^2}{2g}=1$ m。

$$v = \sqrt{2g \times 1} = 4.43 \text{ (m/s)}$$

$$Q = vA = 4.43 \times \frac{3.14 \times 0.1^2}{4} = 0.0348 \text{ (m}^3/\text{s)}$$

(2) 为求 M 点的压强,必须在 M 点取一断面。另一断面取在和大气相接的水箱水面或管流出口断面处,现在选择在出口断面处。则

$$z_M = 1 \text{ m}, \frac{p_1}{\rho g} = \frac{p_M}{\rho g}, \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = 1 \text{ m}$$

$$z_2 = 0 \text{ m}, \frac{p_2}{\rho g} = 0, \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} = 1 \text{ m}, h_w = \frac{1}{2} \times 3 \frac{v^2}{2g} = 1.5 \text{ m}$$

代入能量方程得

$$1 + \frac{p_M}{\rho g} + 1 = 0 + 0 + 1 + 1.5$$

$$\frac{p_M}{\rho g} = 0.5 \text{ m}, p_M = 4.9 \text{ kN/m}^2$$

【例 2-6】 水流由水箱经前后相接的两管流进大气中。大、小管的断面比例为 2 : 1。全部水头损失的计算式参见图 2-17。

- (1) 求出口流速 v_2 。
- (2) 绘总水头线和测压管水头线。
- (3) 根据水头线求 M 点的压强 p_M 。

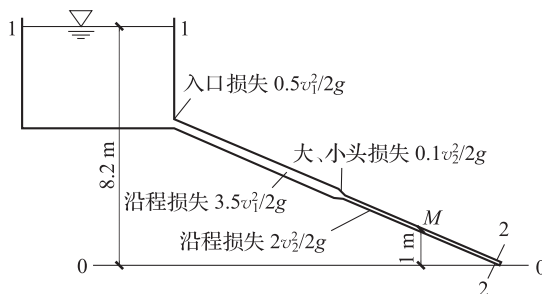


图 2-17 【例 2-6】图

【解】 (1) 划分水箱水面 1—1 断面及出流断面 2—2, 基准面 0—0 通过管轴出口。则

$$z_1 = 8.2 \text{ m}, \frac{p_1}{\rho g} = 0, v_1 = 0$$

$$z_2 = 0 \text{ m}, \frac{p_2}{\rho g} = 0$$

建立能量方程为

$$8.2 + 0 + 0 = 0 + 0 + \frac{v_2^2}{2g} + h_{w1-2}$$

$$h_{w1-2} = 0.5 \frac{v_1^2}{2g} + 3.5 \frac{v_1^2}{2g} + 0.1 \frac{v_2^2}{2g} + 2 \frac{v_2^2}{2g}$$

由于大、小管的断面之比为 2 : 1, 故大、小管的流速之比为 1 : 2, 即 $v_2 = 2v_1$, 则 $\frac{v_2^2}{2g} = 4 \frac{v_1^2}{2g}$ 。将该结果代入上式, 得

$$h_{w1-2} = 3.1 \frac{v_2^2}{2g}$$

$$8.2 = 4.1 \frac{v_2^2}{2g}$$

则

$$\frac{v_2^2}{2g} = 2 \text{ m}, v_2 = \sqrt{2g \times 2} = 6.26 \text{ m/s}$$

$$\frac{v_1^2}{2g} = 0.5 (\text{m})$$