第 3 单元　函　　数

引　例

星期天，妈妈让小明去看外婆，小明家离外婆家 12 km，他想乘出租车去，出租车计价标准如下：行驶路程在 3 km 以内(含 3 km)收费 10 元，以后每行驶 1 km 收费 2.1 元；若行驶总路程超过 10 km，则超过部分按 2.6 元/km 计费，可妈妈只给小明 30 元钱，请你帮小明想一想，用这 30 元钱乘出租车够吗？

3.1　函数的概念

在初中，我们已经学习了变量与函数的概念. 在一个变化过程中有两个变量 x 和 y，如果给定了一个 x 值，就有唯一的一个 y 值与其对应，那么我们称 y 是 x 的函数，其中 x 是自变量，y 是因变量.

例如，一辆汽车以 60 km/h 的速度匀速行驶，则在 t h 里汽车行驶的路程为

$$s=60t,$$

这里的时间 t 为自变量，路程 s 为因变量，时间 t 在某个范围内变化，路程 s 也相应地在某个范围内变化，路程 s 是时间 t 的函数.

用变量的观点来描述函数，可以形象地描述事物的变化规律，但有一定的局限性. 先看下面的问题：

问题一 $y=1(x\in\mathbf{R})$是一个函数吗？

问题二 函数 $y=x$ 与函数 $y=\dfrac{x^2}{x}$是同一个函数吗？

初中学过的函数概念很难回答这些问题，于是，我们从新的角度给出函数的定义：

设集合 D 是一个非空集合，如果按照某个对应法则 f，对于 D 中的任意一个数 x，都有唯一确定的数 y 与之对应，则这种对应关系叫作集合 D 上的一个**函数**，记作

$$y=f(x),x\in D,$$

其中 x 叫作**自变量**，自变量 x 的取值范围（集合 D）叫作函数 $f(x)$的**定义域**，所有函数值构成的集合$\{y \mid y=f(x),x\in D\}$叫作函数 $f(x)$的**值域**.

当 $x=x_0$ 时，函数 $y=f(x)$对应的值 y_0 叫作函数在点 x_0 处的**函数值**，记作 $y_0=f(x_0)$.

该定义使用集合语言确切地刻画了函数，更具有一般性. 从中我们还可以看出，函数的值域是由函数的定义域和对应法则所确定的，因此，一个确定函数只需要两个要素：定义域和对应法则.

在实际问题中，函数的定义域是根据所研究的问题的实际意义确定的；对于用解析式表示的函数，如果不考虑问题的实际意义，则函数的定义域就是能够使函数式有意义的所有实数的集合.

注 意

（1）两个函数相同必须是它们的定义域和对应法则分别完全相同.

（2）有时给出的函数没有明确说明定义域，此时的定义域就是使函数关系式有意义的所有实数构成的集合；在实际问题中，函数的定义域还要受到自变量实际意义的制约.

例 1 求下列函数在指定处的函数值.

(1) $f(x)=3x+1$ 在 $x=0,x=1$ 处的函数值；

(2) $f(x)=x^2+1$ 在 $x=-1,x=3$ 处的函数值.

解 (1) $f(0)=3\times0+1=1$,

$f(1)=3\times1+1=3+1=4$.

(2) $f(-1)=(-1)^2+1=2$,

$f(3)=3^2+1=10$.

例 2　确定下列函数的定义域：

(1) $f(x)=\sqrt{x-5}$；　　(2) $f(x)=\dfrac{1}{x+3}$.

解　(1)要使函数有意义，必须使 $x-5\geqslant 0$，所以函数的定义域为 $x\geqslant 5$，即

$$[5,+\infty).$$

(2)当 $x+3\neq 0$，即 $x\neq -3$ 时，函数有意义，所以函数的定义域为

$$(-\infty,-3)\cup(-3,+\infty).$$

例 3　已知 $f(x)=x^2-5x+2$，求 $f(3)$，$f(-\sqrt{2})$，$f(a+1)$.

解

$$f(3)=3^2-5\times 3+2=-4.$$

$$\begin{aligned}f(-\sqrt{2})&=(-\sqrt{2})^2-5\times(-\sqrt{2})+2\\&=4+5\sqrt{2}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(a+1)&=(a+1)^2-5\times(a+1)+2\\&=a^2-3a-2.\end{aligned}$$

例 4　下列哪个函数与函数 $y=x$ 是同一个函数：

(1) $y=(\sqrt{x})^2$；　　(2) $y=\sqrt[3]{x^3}$；

(3) $y=\sqrt{x^2}$；　　(4) $y=\dfrac{x^2}{x}$.

解　(1)函数 $y=(\sqrt{x})^2=x\,(x\geqslant 0)$ 与 $y=x\,(x\in\mathbf{R})$ 的对应法则相同，但是定义域不同，所以不是同一个函数.

(2)函数 $y=\sqrt[3]{x^3}=x\,(x\in\mathbf{R})$ 与 $y=x\,(x\in\mathbf{R})$ 的定义域、对应法则都相同，所以是同一个函数.

(3)函数 $y=\sqrt{x^2}=|x|\,(x\in\mathbf{R})$ 与 $y=x\,(x\in\mathbf{R})$ 的定义域相同，但是对应法则不同，所以不是同一个函数.

(4)函数 $y=\dfrac{x^2}{x}=x\,(x\neq 0)$ 与 $y=x\,(x\in\mathbf{R})$ 的对应法则相同，但是定义域不同，所以不是同一个函数.

想一想

本节刚开始提出的问题一和问题二的答案是什么？

做一做

1. 求下列函数的定义域：

(1) $f(x)=\sqrt{3x-1}$；　(2) $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$；

(3) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{3x-1}}$；　(4) $f(x)=\sqrt{x+1}+\dfrac{1}{|x-1|}$.

2. 求下列函数的值域：

(1) $f(x)=2+\sqrt{1-x}$；

(2) $f(x)=2x+1, x\in[-1,1]$；

(3) $f(x)=\dfrac{1}{x}, x\in[1,3]$；

(4) $f(x)=x^2-3x, x\in[0,3]$.

3. 请你帮引例中的小明想一想，是否可以乘出租车去看外婆？

习题 3.1

1. 举出日常生活中函数的一个例子.

2. 已知函数 $f(x)=\sqrt{x+3}+\dfrac{1}{x+2}$，求：

(1) $f(-3)$，$f\left(\dfrac{2}{3}\right)$；

(2) 当 $a>0$ 时，$f(a)$，$f(a-1)$ 的值.

3. 求下列函数的定义域：

(1) $f(x)=2x-5$；　(2) $f(x)=\dfrac{1}{2x-5}$；

(3) $f(x)=\sqrt{x-1}$；　(4) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$.

4. 判断下列两组中的函数是否相同，并说明理由.

(1) $f(x)=\dfrac{x}{x}$，$g(x)=1$；

(2) $f(x)=x+1$，$g(t)=t+1$.

3.2 函数的表示方法

3.2.1 函数的三种表示方法

上一节我们已经明确了函数的概念，那么怎样表示一个函数呢？例如，商店里面所售练习本的单价为 0.8 元，买练习本的本数 x（本）与付款款额 y（元）的函数关系如何表示？

1. 列表法

首先，我们做一个表格（见表 3-1）：

表 3-1

x/本	1	2	3	4	5	…
y/元	0.8	1.6	2.4	3.2	4.0	…

列出表格可以很直观地反映出练习本的本数 x 与付款款额 y 之间的关系，像这种通过列出自变量与对应函数值的表格来表示函数关系的方法叫作**列表法**.

2. 解析法

列表法一般不完整，若要买 80 本练习本，则所需付的款额表中就没有，那么还可以用什么方式来表示呢？

我们可以用一个数学式子 $y=0.8x$ 来表示. 像这种在函数 $y=f(x)(x\in D)$ 中，$f(x)$是用代数式或解析式来表示的方法叫作**解析法**. 这种方法严谨、完整，但不够直观.

3. 图像法

描绘函数的图像也可以直观且形象地表示一个函数，

如图 3-1 所示. 像这种利用图像表示函数的方法叫作**图像法**.

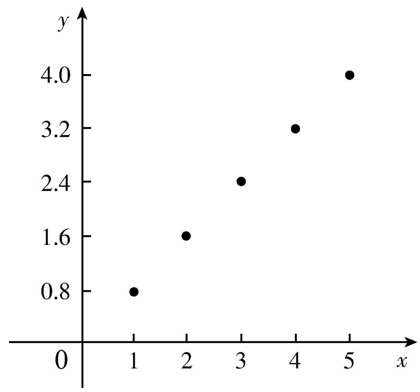


图 3-1

例 1 某工厂的一名普通工人每天的基本工资是 20 元，每加工完成一个合格零件日收入增加 5 元，一名工人的日收入 y 是他每天完成的合格零件数 x 的函数. 当一名工人每天完成的合格零件数在 5 件以内(含 5 件)时，请用三种方法表示这个函数.

解 (1)按照题意，分别计算出一名工人每天完成合格零件数 x 在 1～5 件时的日薪 y(元)，那么函数用列表法表示成表 3-2：

表 3-2

x/件	1	2	3	4	5
y/元	25	30	35	40	45

(2)根据题意，函数的解析式为 $y=20+5x$，因此，函数用解析法表示为

$$y=5x+20, x\in\{1,2,3,4,5\}.$$

(3)以表 3-2 中的 x 值为横坐标，对应的 y 值为纵坐标，在直角坐标系中画出各个相应的点. 因此，函数的图像法表示如图 3-2 所示.

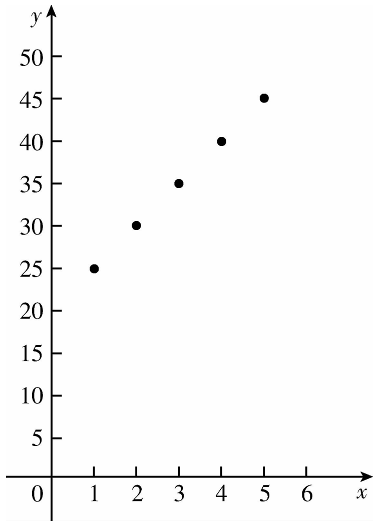


图 3-2

例 2　作出函数 $y=2\sqrt{x}+1$ 的图像.

解　用描点法作函数 $y=2\sqrt{x}+1$ 的图像.

函数的定义域为$[0,+\infty)$，所以应从零和正数中适当地选取若干个 x 的值，并计算出相应的 y 值，列表(见表 3-3)：

表 3-3

x	0	1	2	3	4	…
y	1	3	3.83	4.46	5	…

以表中各组对应值作为点的坐标，在直角坐标系中画出各个相应的点，并用光滑的曲线把它们连接起来就得到函数 $y=2\sqrt{x}+1$ 的图像，如图 3-3 所示.

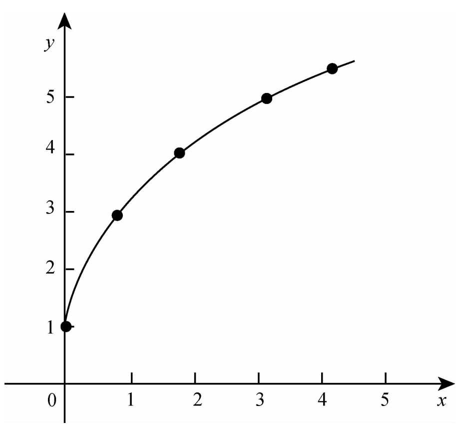


图 3-3

议一议

为什么上述两个函数的图像(图 3-1 和图 3-2)不连接成直线或线段？

知识卡片

Excel(2003 版)软件作函数图像

函数的图像还可以用各种软件绘制,这里我们用具体的例子来介绍一下如何用 Excel(2003 版)软件作函数图像.

用 Excel 作函数 $y=2\sqrt{x}+1$ 图像的步骤如下:

(1)打开 Excel 软件.

(2)列表:

①从函数的定义域$[0,+\infty)$中适当地取若干个 x 的值. 在单元格 A1 中输入 x,在单元格 B1 中输入 0,选中单元格 B1,将鼠标移到 B1 单元格右下角,在出现十字时按住鼠标左键,向右移动到 L1 单元格后放开鼠标,会出现一个下拉菜单,单击它,出现 4 个选项,选中第二个选项“以序列方式填充”(见图 3-4). 我们便得到了 x 的一组取值:0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10.

图 3-4

②计算出各 x 值相应的 y 值. 在 A2 单元格中输入 y,在 B2 单元格中输入“=2＊SQRT(A1)+1”,然后用与①中同样的方法把单元格 B2 拖至 L2,我们便得到了在上述 x 值处的函数值,如图 3-5 所示.

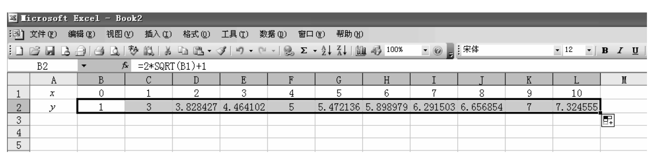


图 3-5

(3)选中列表. 用鼠标选中单元格 B1 至 L2.

(4)作图. 单击工具栏中的“插入”菜单,选择“图表”命令,在弹出对话框的“标准类型”选项卡中选择“XY 散点图”选项,在对话框的右侧选择“平滑散点图”选项,单击

“完成”按钮. 至此,我们便画好了函数 $y=2\sqrt{x}+1$ 的图像,如图 3-6 所示.

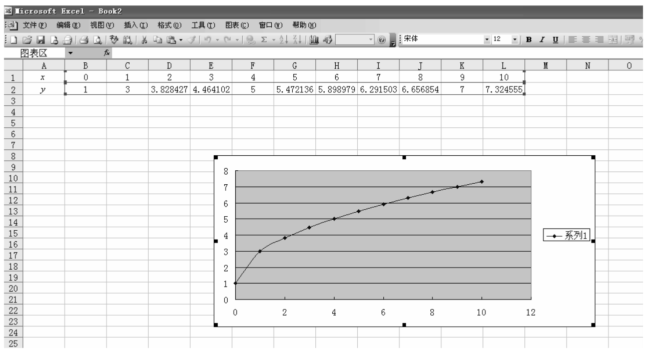


图 3-6

做一做

1. 作出函数 $y=x^3-1$ 的图像.

2. 某手机专卖店销售某种型号的手机,每部售价 3 000 元,当售出的手机数量不超过 5 部时,请分别用解析法、列表法和图像法表示售出手机数量与收款总额之间的函数关系.

3.2.2 分段函数

例 3 国内跨省市之间邮寄信函,每封信函的质量 m(g) 和对应的邮资 M(元)见表 3-4:

表 3-4

m/g	$0<m\leqslant 20$	$20<m\leqslant 40$	$40<m\leqslant 60$	$60<m\leqslant 80$	$80<m\leqslant 100$
M/元	0.80	1.60	2.40	3.20	4.00

请用解析法和图像法表示该函数.

解 (1)函数的解析式为

图文
“分段函数”的应用案例

$$M(m)=\begin{cases}0.80,0<m\leqslant 20,\\1.60,20<m\leqslant 40,\\2.40,40<m\leqslant 60,\\3.20,60<m\leqslant 80,\\4.00,80<m\leqslant 100.\end{cases}$$

(2)函数的图像如图 3-7 所示.

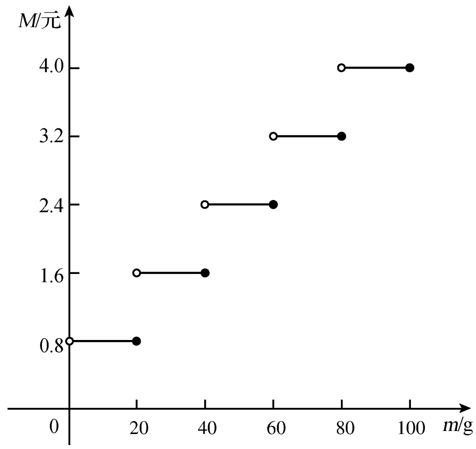


图 3-7

这种在定义域的不同部分有不同对应法则的函数叫作**分段函数**.

议一议

函数 $f(x)=|x|=\begin{cases}x,x\geqslant 0,\\-x,x<0\end{cases}$ 是分段函数吗?

例 4 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x-2,0\leqslant x<2,\\3x,2\leqslant x<4.\end{cases}$

(1)写出函数 $f(x)$的定义域;

(2)求 $f(0)$,$f(1)$,$f(2)$,$f(3)$;

(3)作出函数 $f(x)$的图像.

解 (1)该函数的定义域为$[0,2)\cup[2,4)$,即$[0,4)$.

(2)因为 $0,1\in[0,2)$,这时 $f(x)=x-2$,所以

$$f(0)=0-2=-2,$$

$$f(1)=1-2=-1.$$

因为 $2,3\in[2,4)$,这时 $f(x)=3x$,所以

$$f(2)=3\times 2=6,$$

$$f(3)=3\times 3=9.$$

(3)在同一直角坐标系中,用描点法在$[0,2)$内作出$f(x)=x-2$ 的图像,在$[2,4)$内作出 $f(x)=3x$ 的图像,如图3-8所示.

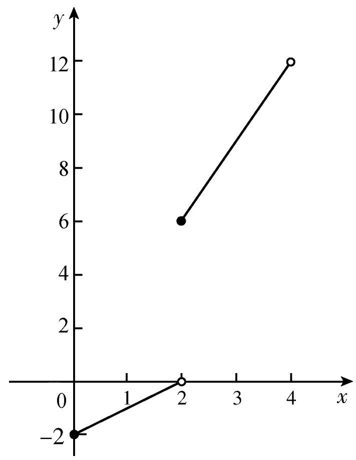


图 3-8

做一做

设函数 $f(x)=\begin{cases}1, x\leqslant 1,\\ \sqrt{x-2}, x>1,\end{cases}$ 求 $f[f(3)]$ 的值.

议一议

函数 $D(x)=\begin{cases}1, x\text{ 是有理数},\\ 0, x\text{ 是无理数}\end{cases}$ 能用图像法表示吗?

习题 3.2

1. 如果一辆汽车匀速行驶,2 h 行驶 110 km,这辆汽车行驶的路程 s 是时间 t 的函数,请用解析法和图像法表示这个函数.

2. 作函数 $y=f(x)=2, x\in\mathbf{R}$ 的图像,并求 $f(-1)$,$f(0)$,$f(4)$ 的值.

3. 设函数

$$f(x)=\begin{cases}2x, x<0,\\ x^2, x\geqslant 0.\end{cases}$$

(1)求函数 $f(x)$ 的定义域;

(2)求 $f(-2)$,$f(0)$,$f(1)$;

(3)作出函数 $f(x)$ 的图像.

4. 作出下列函数的图像:

(1)$y=3$; (2)$y=x^2-3x+2$;

(3) $y=(x-2)^2$；　　(4) $y=3-x, x\in[0,3]$.

3.3 函数的性质

3.3.1 函数的单调性

图 3-9 所示为某地区 2017 年元旦这一天 24 h 内气温的变化图.

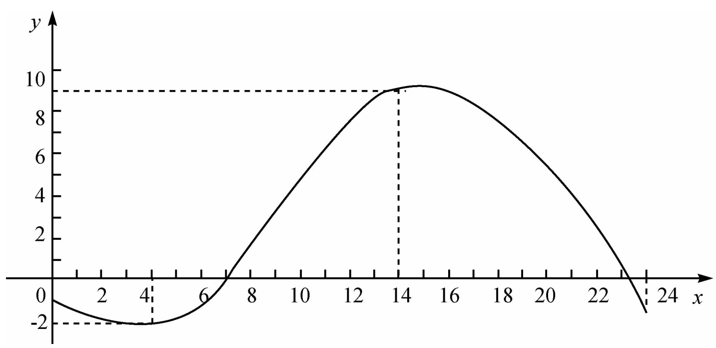


图 3-9

从上图中可以看到，在 4 时到 14 时这个时间段内，气温是逐步升高的；在 0 时到 4 时和 14 时到 24 时的时间段内，气温是逐步下降的.

像这种，函数图像的“上升”“下降”反映了函数的一个基本性质——单调性.

一般地，设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subseteq D$. 如果取区间 I 中的任意两点 x_1、x_2，则

(1) 当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)<f(x_2)$ 成立，那么函数 $y=f(x)$ 叫作区间 I 上的**增函数**（或**单调递增函数**），区间 I 叫作函数 $y=f(x)$ 的**增区间**. 观察图 3-10，函数 $y=f(x)$ 是区间 (a,b) 上的增函数，区间 (a,b) 是该函数的增区间.

想一想

定义中“任意”两个点 x_1、x_2 可以改成“存在”两个点 x_1、x_2 吗？

(2)当 $x_1<x_2$ 时,有 $f(x_1)>f(x_2)$成立,那么函数 $y=f(x)$叫作区间 I 上的**减函数**(或**单调递减函数**),区间 I 叫作函数 $y=f(x)$的**减区间**. 观察图 3-11,函数 $y=f(x)$是区间(a,b)上的减函数,区间(a,b)是该函数的减区间.

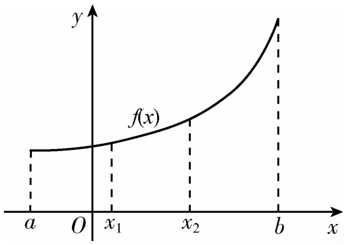


图 3-10

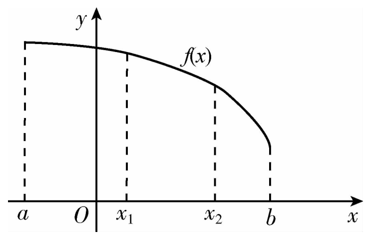


图 3-11

在某一区间上单调递增或单调递减的函数叫作在这个区间上的**单调函数**,该区间叫作这个函数的**单调区间**.

例 1 讨论函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$在$(0,+\infty)$上的单调性.

解 在$(0,+\infty)$内任意取 x_1,x_2,设 $x_1<x_2$,则

$$f(x_2)-f(x_1)=\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=\frac{x_1-x_2}{x_1x_2}.$$

因为 $0<x_1<x_2$,所以 $x_1x_2>0,x_1-x_2<0$,于是

$$f(x_2)-f(x_1)=\frac{x_1-x_2}{x_1x_2}<0,$$

即 $f(x_1)>f(x_2)$. 因此 $f(x)=\dfrac{1}{x}$在$(0,+\infty)$上是单调递减的.

例 2 图 3-12 所示为函数 $y=f(x)$的图像,其定义域为区间$[-8,12]$,根据图像写出函数的单调性.

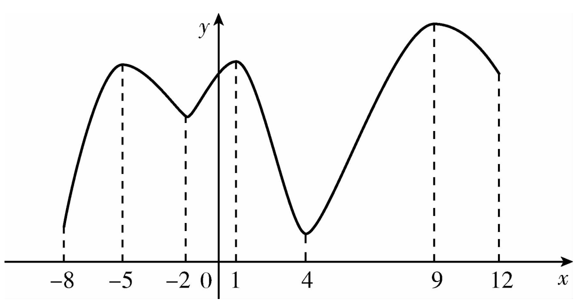


图 3-12

解 由图像可看出:自变量 x 在$(-8,-5)$内,函数 $f(x)$

注 意

函数的单调性是函数局部的一个性质.

议一议

例 1 是否有其他解法?

是单调递增的，所以函数 $f(x)$ 在区间 $(-8,-5)$ 上是增函数；自变量 x 在 $(-5,-2)$ 内，函数 $f(x)$ 是单调递减的，所以函数 $f(x)$ 在区间 $(-5,-2)$ 上是减函数. 类似地可看出，函数 $f(x)$ 在区间 $(-2,1)$ 和 $(4,9)$ 上是增函数，在区间 $(1,4)$ 和 $(9,12)$ 上是减函数.

做一做

讨论函数 $g=x^2$，$y=x^3$ 的单调性.

3.3.2 函数的奇偶性

想一想

点 $M(a,b)$ 关于 x 轴的对称点的坐标怎么表示？

在初中平面几何中，我们学习了轴对称图形和中心对称图形的知识，知道了点 $M(a,b)$ 关于 y 轴的对称点为 $M'(-a,b)$，关于原点的对称点为 $M''(-a,-b)$.

首先，我们来分析函数 $f(x)=x^2$，则

$$f(-2)=f(2)=4,$$

$$f(-1)=f(1)=1,$$

$$f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x).$$

可以看出，函数 $f(x)=x^2$ 图像上的任意点 $M(x,f(x))$ 关于 y 轴的对称点 $N(-x,f(x))$ 也在 $f(x)=x^2$ 的图像上，所以函数 $f(x)=x^2$ 的图像关于 y 轴对称，如图 3-13 所示.

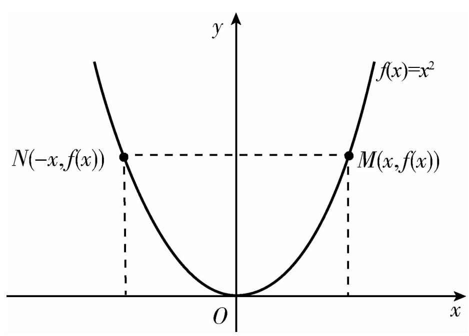


图 3-13

从上述分析我们引出下述定义：设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，如果对 D 内的任意 x，都有 $-x\in D$，且

$$f(-x)=f(x),$$

则这个函数叫作**偶函数**，其图像关于 y 轴对称. 上述函数 $y=x^2$ 即为偶函数.

已知函数 $f(x)=x^3$，有

$$f(-2)=-8,\quad f(2)=8,$$

$$f(-1)=-1,\quad f(1)=1,$$

$$f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x).$$

可以看出，函数 $f(x)=x^3$ 图像上的任意点 $M(x,f(x))$ 关于原点的对称点 $N(-x,-f(x))$ 也在 $f(x)=x^3$ 图像上，所以函数 $f(x)=x^3$ 图像关于原点对称，如图 3-14 所示.

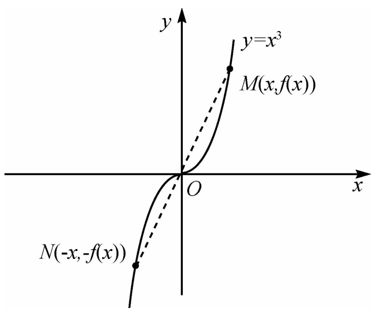


图 3-14

图片
对称图案

从上述分析我们引出下述定义：设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，如果对 D 内的任意 x，都有 $-x\in D$，且

$$f(-x)=-f(x),$$

则这个函数叫作**奇函数**，其图像关于原点对称. 上述的函数 $y=x^3$ 即为奇函数.

注 意

反过来，如果一个函数的图像关于 y 轴对称，这个函数也一定是偶函数；如果一个函数的图像关于原点对称，这个函数也一定是奇函数.

例 3 判断下列函数是否具有奇偶性：

(1) $f(x)=x+x^5$；　　(2) $f(x)=x^8-2$；

(3) $f(x)=x^2,x\in[2,5]$；　　(4) $f(x)=x-1$.

解 (1) 函数 $f(x)=x+x^5$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，当 $x\in\mathbf{R}$ 时，$-x\in\mathbf{R}$，且

$$f(-x)=(-x)+(-x)^5=-f(x),$$

所以函数 $f(x)=x+x^5$ 是奇函数.

(2) 函数 $f(x)=x^8-2$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，当 $x\in\mathbf{R}$ 时，$-x\in\mathbf{R}$，且

$$f(-x)=(-x)^8-2=f(x),$$

所以函数 $f(x)=x^8-2$ 是偶函数.

注 意

奇函数和偶函数的定义域一定关于原点对称.

(3)函数 $f(x)=x^2$ 的定义域[2,5]不关于原点对称，如存在 $4\in[2,5]$，而 $-4\notin[2,5]$，所以函数 $f(x)=x^2, x\in[2,5]$既不是偶函数又不是奇函数.

(4)函数 $f(x)=x-1$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，当 $x\in\mathbf{R}$ 时，$-x\in\mathbf{R}$，但是 $f(-x)\neq f(x)$，$f(-x)\neq -f(x)$，所以函数 $f(x)=x-1$ 既不是偶函数又不是奇函数.

做一做

1. 判断下列哪些是偶函数？

(1) $f(x)=x^2-1$；

(2) $f(x)=-x^2+1$；

(3) $f(x)=\dfrac{2}{x}$；

(4) $f(x)=2x$.

2. 判断下列哪些是奇函数？

(1) $f(x)=x+x^4$；　(2) $f(x)=\dfrac{x}{2}$；

(3) $f(x)=1-2x$；　(4) $p(x)=\dfrac{1}{x}$.

习题 3.3

1. 判断函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(-\infty,0)$ 上的单调性并证明你的结论.

2. 画出下列函数的图像，根据图像说出它们的单调区间：

(1) $f(x)=-x^2$；　(2) $f(x)=x^2+2$.

3. 判断下列函数是否具有奇偶性：

(1) $f(x)=2$；　(2) $f(x)=-2x^3$；

(3) $f(x)=x^3+33$；　(4) $f(x)=x(x^2-4)$；

(5) $f(x)=\dfrac{2}{x^2-2}$；

(6) $f(x)=\dfrac{2}{x^2+2}, x\in[-4,2]$.

3.4 反　函　数

3.4.1 反函数的定义

在函数的定义中有两个变量，一个是自变量，另一个是自变量的函数. 但是在实际问题中，究竟把哪一个变量作为自变量，是由实际需要决定的.

引例 1 设某种商品 2 000 kg，销售起点是 1 kg，单价为 3 元/kg，则其销售收入 y(元)与销售数量 x(kg)之间的函数关系式为 $y=3x$，在这一函数中，x 是自变量，定义域为$[1, 2\ 000]$，y 是函数，值域为$[3, 6\ 000]$.

把上面的问题反过来，如果我们考察当销售收入 y(元)变化时销售数量 x(kg)的变化情况，此时销售收入 y 就是自变量，销售数量 x 就是 y 的函数. 它们之间的关系式是从 $y=3x$ 中解出 x 得 $x=\dfrac{y}{3}$，此函数定义域为 $y\in[3, 6\ 000]$，值域为 $x\in[1, 2\ 000]$. 我们称函数 $x=\dfrac{y}{3}$ 是函数 $y=3x$ 的反函数.

一般地，给出下面定义：

定义 设函数 $y=f(x)$，其定义域为 D，值域为 M. 如果对于任一 $y\in M$，都可由关系式 $y=f(x)$ 确定唯一的 x 值 $(x\in D)$ 与之对应，那么就确定了一个以 y 为自变量的函数 $x=\varphi(y)$，我们把它称为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**，记为 $x=$

$f^{-1}(y)$，它的定义域为 M，值域为 D.

例如，函数 $y=2x+1$，从中解出 $x=\frac{1}{2}(y-1)$ 就是函数 $y=2x+1$ 的反函数.

但习惯上常用 x 表示自变量，y 表示函数，因此，互换函数式 $x=f^{-1}(y)$ 中的字母 x，y，把它改写成 $y=f^{-1}(x)$，如 $y=3x$ 的反函数为 $y=\frac{x}{3}$，函数 $y=2x+1$ 的反函数为 $y=\frac{1}{2}(x-1)$.

如无特殊说明，此后本书中的反函数均指这种改写后的反函数.

例 1 求下列函数的反函数：

(1) $y=x^3+1$；　　(2) $y=\sqrt{x}+1(x\geqslant 0)$.

解 (1)由 $y=x^3+1$，解得

$$x=\sqrt[3]{y-1},$$

所以函数 $y=x^3+1$ 的反函数为 $y=\sqrt[3]{x-1}$.

(2)由 $y=\sqrt{x}+1(x\geqslant 0)$，解得

$$x=(y-1)^2,$$

所以函数 $y=\sqrt{x}+1(x\geqslant 0)$ 的反函数为 $y=(x-1)^2(x\geqslant 1)$.

由以上例子可以得出，函数 $y=f(x)$ 与函数 $y=f^{-1}(x)$ 互为反函数.

应当注意，不是每个函数在其定义域内都有反函数，只有当函数的反对应关系是单值时它才有反函数.

想一想

还有哪些函数没有反函数?

例如，函数 $y=x^2$，定义域为 $(-\infty,+\infty)$. 由表达式解得 $x=\pm\sqrt{y}$，说明这个函数的反对应关系不是单值的，所以函数 $y=x^2$ 在定义域 $(-\infty,+\infty)$ 上没有反函数. 但是若限定 $x\in(0,+\infty)$ 时，函数 $y=x^2$ 的反对应关系 $x=\sqrt{y}$ 是单值的，所以有反函数 $y=\sqrt{x}$；若限定 $x\in(-\infty,0)$ 时，函数 $y=x^2$ 的反对应关系 $x=-\sqrt{y}$ 是单值的，所以有反函数 $y=-\sqrt{x}$.

做一做

求下列函数的反函数：

(1) $y=x^2-2x-1(x\leqslant 0)$；

(2) $y=\begin{cases} x^2-1(x\geqslant 0), \\ 2x-1(x<0). \end{cases}$

3.4.2 互为反函数的函数图像间的关系

引例 2 求函数 $y=3x+2$ 的反函数，并在同一平面直角坐标系中画出它们的图像.

解 由 $y=3x+2$ 解得

$$x=\frac{1}{3}(y-2),$$

因此，函数 $y=3x+2$ 的反函数为

$$y=\frac{1}{3}(x-2).$$

图 3-15 所示为函数 $y=3x+2$ 和它的反函数 $y=\frac{1}{3}(x-2)$ 的图像.

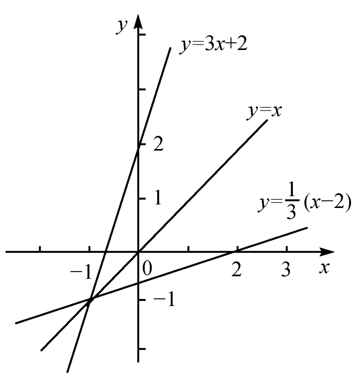


图 3-15

从图 3-15 中可以看到函数 $y=3x+2$ 的图像是过点(0,2)和点(−1,−1)的一条直线，其反函数 $y=\frac{1}{3}(x-2)$ 的图像是

过点(2,0)和(−1,−1)的一条直线. 显然函数 $y=3x+2$ 的图像与其反函数 $y=\frac{1}{3}(x-2)$的图像关于直线 $y=x$ 对称.

一般地,函数 $y=f(x)$的图像与其反函数 $y=f^{-1}(x)$的图像关于直线 $y=x$ 对称.

今后我们也可以利用上述互为反函数的函数图像间的关系,由函数 $y=f(x)$的图像画出其反函数 $y=f^{-1}(x)$的图像.

例 2 求函数 $y=x^3$ 的反函数,并在同一坐标系内利用 $y=x^3$ 的图像画出其反函数的图像.

解 由 $y=x^3$ 得

$$x=\sqrt[3]{y},$$

所以函数 $y=x^3$ 的反函数为 $y=\sqrt[3]{x}$.

因为函数 $y=x^3$ 的图像与其反函数 $y=\sqrt[3]{x}$的图像关于直线 $y=x$ 对称,所以可先画出函数 $y=x^3$ 的图像,然后画直线$y=x$,最后根据其对称性画出图 3-16 所示的 $y=\sqrt[3]{x}$ 的图像.

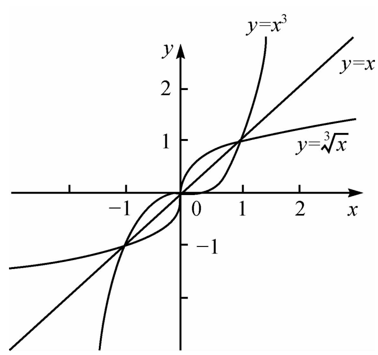


图 3-16

做一做

求 $y=3x-2(x\in \mathbf{R})$的反函数,并画出原函数与反函数的图像.

习题 3.4

1. 下列函数是否有反函数？如果有，将它写出来，并指出定义域：

(1) $y=x^2-1, x\in(-\infty,+\infty)$；

(2) $y=x^2+5,\ x\in[0,+\infty)$；

(3) $y=|x|, x\in(-\infty,+\infty)$；

(4) $y=|x|, x\in(-\infty,0]$.

2. 求下列函数的反函数，并在同一平面直角坐标系内画出它们的图像：

(1) $y=2x+7$；　　(2) $y=\frac{1}{2}x^3$；

(3) $y=\frac{2}{x}$.

3. 已知 $y=2x-1, x\in\{0,1,2,3,4\}$. 求它的反函数 $y=f^{-1}(x)$，并在同一坐标系内画出它们的图像.

4. 求证：函数 $y=\frac{1-x}{1+x}(x\neq-1)$ 的反函数就是其本身. 然后说明这个函数的图像具有什么特点.

3.5　函数的实际应用举例

本节通过举例来说明函数在实际中的应用.

例 1　某质点在 30 s 内的运动速度 v (cm/s) 是时间 t(s) 的函数，它的图像如图 3-17 所示.

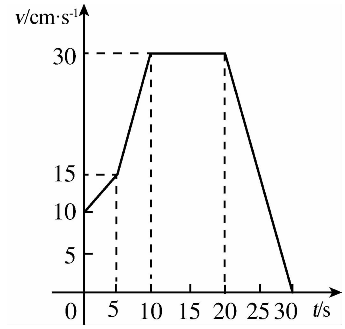


图 3-17

(1)用解析法表示出这个函数；

(2)求出 9 s 时质点的速度.

解 (1)函数的解析式为

$$v(t)=\begin{cases}t+10,0\leqslant t<5,\\3t,5\leqslant t<10,\\30,10\leqslant t<20,\\-3t+90,20\leqslant t\leqslant 30.\end{cases}$$

(2)因为 $9\in[5,10)$，所以 $v(9)=3\times 9=27$(cm/s).

例 2 某市电信营业厅为了鼓励固定手机话费，推出新的优惠套餐：固定月租费为 10 元；每月拨打市内电话不超过 120 min 时，每分钟收费 0.2 元；超过 120 min 时，超过部分每分钟收费 0.1 元；不足 1 min 时按 1 min 计费. 请写出某用户一个月的市内电话费 y(元)与拨打时间 x(min)之间的函数解析式.

解 由题意知，拨打时间 x 在不同的范围内，收费标准是不同的.

当 $0\leqslant x\leqslant 120$ 时，$y=10+0.2x$.

当 $x>120$ 时，$y=10+0.2\times 120+(x-120)\times 0.1=0.1x+22$.

所以函数的解析式为

$$y=f(x)=\begin{cases}0.2x+10,0\leqslant x\leqslant 120.\\0.1x+22,x>120.\end{cases}$$

做一做

1. 弹簧挂上物体后会伸长，测得某一弹簧的长度 y(cm)与悬挂物体的质量 x(kg)有下面一组对应值(见表 3-5).

表 3-5

x/kg	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y/cm	12	12.5	13	13.5	14	14.5	15	15.5	16

根据上述对应值回答：

(1)弹簧不挂物体时长度是多少?

(2)当所挂的物体质量每增加 1 kg 时，弹簧怎样变化?

(3)求弹簧总长度 y(cm)与所挂物体质量 x(kg)的函数解析式.

2. 因特网的费用由两部分组成：电话费和上网费. 某地区电话费为 0.16 元/3 min；上网费每月不超过 60 h，以 4 元/h 计算，超过 60 h 部分，以 8 元/h 计算. 试将每月因特网的费用表示为上网时间(h)的函数.

习题 3.5

1. 某汽车油箱能盛油 80 L，汽车每行驶 40 km 耗油 6 L. 求加满油后，油箱中剩余油量 y(L)与汽车行驶路程 x(km)之间的函数解析式.

2. 学生甲每小时走 3 km，出发 1.5 h 后，学生乙以每小时 4.5 km 的速度追赶甲，设乙行走的时间为 t h. 写出甲、乙两学生走的路程 s_1，s_2 与时间 t 的函数解析式.

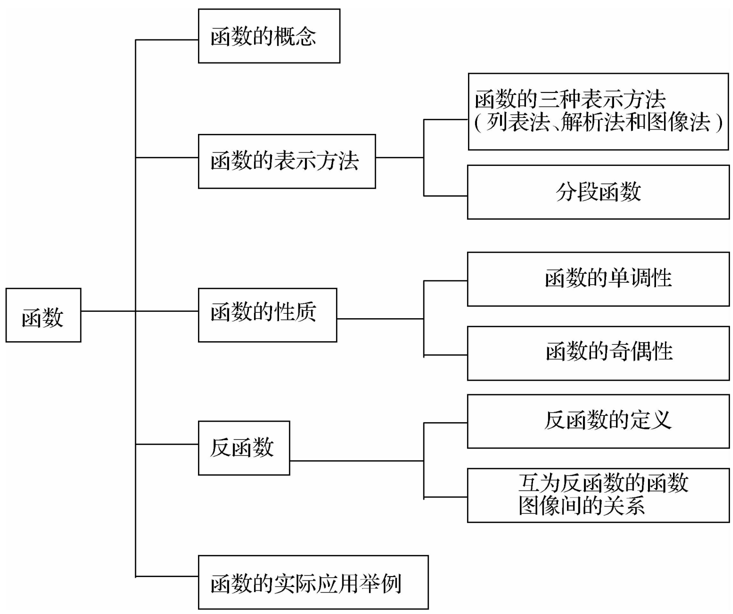
3. 大气温度 y(℃)随着离开地面高度 x (km)的增加而降低，到上空 11 km 为止，大约每上升 1 km，气温降低 6 ℃，而在更高的上空气温却几乎没变(设地面温度为 22 ℃). 求：

(1)y 与 x 的函数解析式；

(2)$x=3.5$ km 及 $x=12$ km 处的气温.

单元小结

一、知识脉络图



二、主要内容

本单元主要学习函数的概念、函数的性质及其应用.

1. 函数的概念

如果在某一变化过程中有两个变量 x，y，对于 x 在某个范围 D 内的每个确定的值，按照某个对应法则 f，y 都有唯一确定的值与它对应，那么把 x 叫作自变量，把 y 叫作 x 的函数，也称 y 是因变量，记作 $y=f(x)$，数集 D 叫作函数的定义域.

函数的两要素是对应法则和定义域，因此，两个函数要相等的条件是当且仅当它们的对应法则和定义域都相同.

2. 函数的表示方法

函数有三种表示方法，即列表法、解析法和图像法. 在解

决问题时，应根据实际需要选择恰当的表示方法.

3. 分段函数

分段函数是函数的定义域被划分为不同的范围时，采用了不同的对应关系的一种函数. 但是它仍是一个函数.

4. 函数的性质

(1)设函数 $f(x)$的定义域为 D，区间 $I\subseteq D$. 如果对于任意的 $x_1,x_2\in \boldsymbol{I}$，当 $x_1<x_2$ 时，都有

$$f(x_1)<f(x_2).$$

则称函数 $f(x)$在区间 I 上是单调递增的(或者说 $f(x)$在区间 I 上是增函数)，称区间 I 是 $f(x)$的增区间.

如果对于任意的 $x_1,x_2\in \boldsymbol{I}$，当 $x_1<x_2$ 时，都有

$$f(x_1)>f(x_2).$$

则称函数 $f(x)$在区间 I 上是单调递减的(或者说 $f(x)$在区间 I 上是减函数)，称区间 I 是 $f(x)$的减区间.

(2)设函数 $f(x)$的定义域为 D，如果对于任意的 $x\in D$，都有 $-x\in D$，并且

$$f(-x)=f(x),$$

那么称 $f(x)$是偶函数.

函数 $f(x)$是偶函数，当且仅当 $f(x)$的图像关于 y 轴对称.

设函数 $f(x)$的定义域为 D，如果对于任意的 $x\in D$，都有 $-x\in D$，并且

$$f(-x)=-f(x),$$

那么称 $f(x)$是奇函数.

函数 $f(x)$是奇函数，当且仅当 $f(x)$的图像关于原点对称.

5. 反函数

设函数 $y=f(x)$的定义域为数集 D，值域为 M，如果对于 M 中每个元素 y，在 D 中都有唯一一个元素 x 与之对应，那么 x 是 y 的函数，记作 $x=g(y)$，则 $x=g(y)$称为$y=f(x)$的反函数，记作 $y=f^{-1}(x)$.

$y=f(x)$的值域是反函数 $y=f^{-1}(x)$的定义域，$y=f(x)$的定义域是反函数 $y=f^{-1}(x)$的值域.

如果函数 $y=f(x)$有反函数，那么 $y=f(x)$的图像与它的反函数 $y=f^{-1}(x)$的图像关于直线 $y=x$ 对称.

6. 函数的实际应用

函数的实际应用问题主要抓住以下几个步骤：一是读懂题意，二是正确建立函数关系，三是转化为函数问题，四是做好最后的回答.

复习题

A 组

1. 选择题：

(1)函数 $y=\sqrt{x-4}$的定义域是(　　).

A. $(4,+\infty)$　　B. $(-\infty,4)$

C. $\mathbf{R}$　　D. $[4,+\infty)$

(2)下列函数在$(0,+\infty)$上为单调增加的是(　　).

A. $y=x^2$　　B. $y=\dfrac{1}{x}$

C. $y=-2x^2+x$　　D. $y=-3x+2$

(3)已知函数 $y=f(x)$在定义域上为单调递减函数，且 $f(x_1)<f(x_2)$，则(　　).

A. $x_1<x_2$　　B. $x_1>x_2$

C. $x_1=x_2$　　D. 以上都可能

(4)已知函数 $y=x^2-2x+11$，则此函数在下列哪个区间上单调递减？(　　)

A. $(1,+\infty)$　　B. $(-\infty,1]$

C. $(-1,+\infty)$　　D. $(-\infty,+\infty]$

(5)下列哪个函数的定义域关于原点对称？(　　)

A. $y=\dfrac{1}{x+1}$　　B. $y=\sqrt{x+1}$

C. $y=x^2+1,x\in[-1,1)$　　D. $y=x^3$

(6)若函数 $y=f(x)$的图像关于原点对称，且 $f(5)=-8$，则 $f(-5)$为(　　).

A. -8　　B. 8

C. -5　　　　　　D. 5

(7)下列函数中为偶函数的是(　　).

A. $y=-x^2+3x-1$　　　　B. $y=-3|x|$

C. $y=x^3$　　　　D. $y=\sqrt{x}$

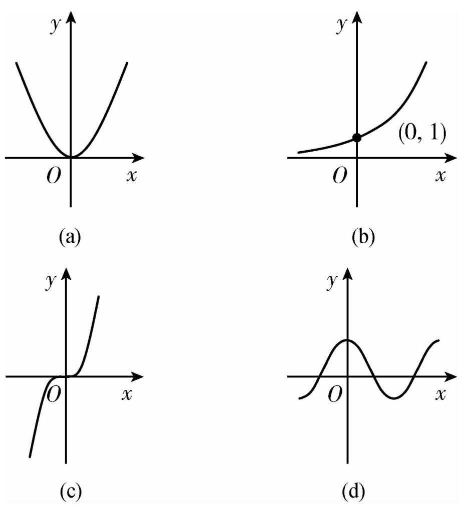
(8)下列函数中为奇函数的是(　　).

A. $y=x+1$　　　　B. $y=x^2+1$

C. $y=\dfrac{1}{x}$　　　　D. $y=\dfrac{1}{x+1}$

2. 填空题:

(1)根据下列函数的图像判断,是偶函数的有________,是奇函数的有________.



(a)　(b)　(c)　(d)

(2)某型号的收音机每台售价302元,买x台这样型号收音机的函数为$f(x)=302x$,此时x的定义域为________.

(3)已知函数$f(x)=\begin{cases}x-1, x>1,\\ x+1, x\leqslant 1,\end{cases}$则$f(2)=$________.

(4)已知$y=-3x^2+x-2$,则$f(-2)=$________,$f(2x)=$________.

(5)函数$y=x^2+2$的减区间为________.

(6)偶函数的图像关于________对称,奇函数的图像关于________对称.

3. 求下列函数的定义域:

(1)$f(x)=\dfrac{x-1}{2}$;

(2) $f(x)=\dfrac{3}{x-2}$；

(3) $f(x)=-\sqrt{x-3}$；

(4) $f(x)=\begin{cases} x^2, 0<x<2, \\ x+2, 2\leqslant x<4. \end{cases}$

4. 设函数

$$f(x)=\begin{cases} x-2, x\geqslant 1, \\ x^2-2, -1<x<1, \\ -1, x\leqslant -1. \end{cases}$$

(1)写出函数 $f(x)$的定义域；

(2)求 $f(2)$，$f(0)$，$f(-2)$；

(3)作出函数 $f(x)$的图像.

5. 证明函数 $y=-5x+2$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数.

6. 某市出租车的起步价为 10 元(3 km 以内). 如果超过 3 km，那么超过部分为 1.5 元/km. 如果超过 5 km，那么超过部分为 2 元/km. 试写出租车费 y (元)与路程 x (km)之间的函数解析式，并作出函数的图像.

B 组

1. 求函数 $y=\sqrt{3-x}+\dfrac{1}{x-1}$的定义域.

2. 判断函数 $y=x^2+2x$ 在$(-1,+\infty)$上的单调性并证明.

3. 已知 $y=\dfrac{1}{5}x+b$ 与 $y=ax+3$ 互为反函数，求 a，b 的值.

4. 某产品每件定价 80 元，每天可售出 30 件. 若每件定价 120 元，则每天可售出 20 件. 如果售出件数是定价的一次函数，求这个函数的解析式.

知识拓展

函数概念的发展历史

17 世纪，科学家们致力于运动的研究，如计算天体的位

置、远距离航海中对经度和纬度的测量、炮弹的速度对于高度和射程的影响等，诸如此类的问题都需要探究两个变量之间的关系，并根据这种关系对事物的变化规律做出判断，如根据炮弹的速度推测它能达到的高度和射程. 这正是函数产生和发展的背景.

函数概念的发展主要经历了以下几个历史时期。

1. 早期函数概念——几何观念下的函数

1673 年，德国数学家莱布尼茨(G. W. Leibniz，1646—1716)首次使用“function”(函数)表示“幂”，后来他用该词表示曲线上点的横坐标、纵坐标、切线等随曲线变化而改变的几何量.

2. 18 世纪的函数概念——代数观念下的函数

1718 年，瑞士数学家约翰·伯努利(Johann Bernoulli，1667—1748)在莱布尼茨函数概念的基础上对函数概念进行了定义：“由任一变量和常数的任一形式所构成的量”. 他强调函数要用公式来表示. 1755 年，瑞士数学家欧拉(L. Euler，1707—1783)把函数定义为“如果某些变量以某一种方式依赖于另一些变量，即当后面这些变量变化时，前面这些变量也随着变化，我们把前面的变量称为后面变量的函数”. 他把约翰·伯努利给出的函数定义称为解析函数，并进一步把它区分为代数函数和超越函数，还考虑了“随意函数”.

3. 19 世纪的函数概念——对应关系下的函数

1821 年，法国数学家柯西(Cauchy，1789—1857)从定义变量起给出了函数定义：“在某些变数间存在着一定的关系，当一经给定其中某一变数的值，其他变数的值可随着确定时，则将最初的变数叫作自变量，其他各变数叫作函数”. 在柯西的定义中，首次出现了自变量一词，同时指出对函数来说不一定要有解析表达式，不过他仍然认为函数关系可以用多个解析式来表示，这是一个很大的局限. 1837 年，德国数学家狄利克雷(Dirichlet，1805—1859)拓广了函数概念，指出：“对于在某区间上的每个确定的 x 值，y 都有一个或多个确定的值，那么 y 叫作 x 的函数”. 这个定义避免了函数定义中对依赖关系的描述，以清晰的方式被所有数学家接受，这就是

人们常说的经典函数定义.

4. 现代函数概念——集合论下的函数

1914 年，德国数学家豪斯道夫（F. Hausdorff，1868—1942）在他的《集论基础》（*Grundzügeder Mengenlehre*）中用不明确的概念“序偶”来定义函数，其避开了意义不明确的“变量”“对应”概念. 1921 年，波兰数学家库拉托夫斯基（Kuratowski，1896—1980）用集合概念来定义“序偶”，使豪斯道夫的定义更严谨了. 1930 年，新的现代函数定义为“若对集合 M 的任意元素 x，总有集合 N 确定的元素 y 与之对应，则称在集合 M 上定义一个函数，记为 $y=f(x)$. 元素 x 称为自变元，元素 y 称为因变元.”

函数概念的发展与生产、生活及科学发展的实际需要紧密相关，而且随着研究的深入，函数概念不断得到严谨化、精确化的表达，这与我们学习函数的过程是一样的.