

## 电路的基本概念和基本定律

本章主要介绍电路和电路分析的基础知识。首先从电路模型入手,介绍电路的基本概念和电阻、电容、电感三大基本元件,同时详细介绍电流、电压、电功率等电路变量的概念。由于电源内阻的存在,所以主要从电压源和电流源两个角度阐述实际电源在不同电路中所表现的特性;然后介绍电路分析中最常用的一些专业术语和两个最基本的分析方法:基尔霍夫电流定律(KCL)和基尔霍夫电压定律(KVL)。这些知识是全书的基础。最后介绍电路的几种工作状态。

### 1.1 电路和电路模型

#### 1.1.1 电路

人们生活在电气化、信息化的社会里,广泛地应用着各种电子产品和设备,在这些电子产品和设备中有各种各样的电路。例如,传输、分配电能的电力电路,转换、传输信息的通信电路,控制各种家用电器和生产设备的控制电路,交通运输中使用的各种信号控制电路等。这些电路都是由各种电气元件按照一定方式连接而成的,是可提供电流流通的路径。

从电路的组成来看,实际电路总可以分为三个部分:一是为电路提供电能或信号的电气元件,称为电源或信号源;二是用电设备,称为负载;三是中间环节,如导线、开关、控制器等。电路在电源或信号源的作用下,才会产生电压、电流。因此,在某种场合又把电源或信号源称为激励,由激励所产生的电压和电流称为响应。

现实中电路的样式非常多,其作用大致有两类:一是实现能量的转换和传输;二是实现信号的传递和处理。图 1.1.1 所示电路是由一个电源(干电池)、一个负载(小灯泡)、一个开关和若干导线组成的最简单电路,该电路实现的是能量的转换和传输作用。当开关闭合后,存储在干电池中的化学能转换为电能,经连接导体供给灯泡使用,灯泡则将电能转换为光能和热能,实现能量的转换和传输。图 1.1.2 所示是一个扩音机的工作过程,该电路实现了电路的另一作用——传递和处理电信号。话筒将声音的振动信号转换为电信号(相应的电压和电流),经过放大处理后,通过电路传递给扬声器,再由扬声器还原为声音。

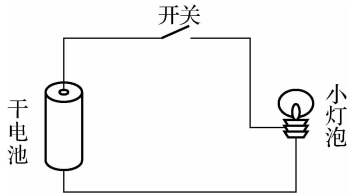


图 1.1.1 手电筒实际电路图

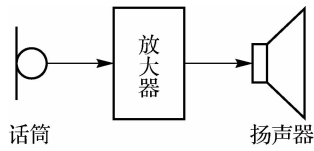


图 1.1.2 扩音机的工作过程

### 1.1.2 电路模型

现实生活中,人们所接触的实际电路通常非常复杂。例如,从电路的几何尺寸来看,大的可达数千千米,甚至连接全世界,如电力网、通信网、因特网;而小的如集成电路,虽然只如指甲般大小,却是由千千万万个小电路集合而成的一个电路系统。又如,从电路中所进行的电磁运动来看,一个最简单的线绕式电阻器,通电时可将电能转换为热能,这种转换与流过电流的大小有关,而且不可逆转。因此,电阻器是一个消耗电能的器件,但是通电的导线周围存在磁场,于是一部分电能转换为磁能。再进一步分析,会发现该磁场随着流过电流的频率不同而不同。任何一个实际电路器件在电压、电流作用下,总是同时发生多种电磁效应,但电阻主要消耗电能,电感线圈主要存储磁场能量,电容器主要存储电场能量,电池和发电机等主要提供电能。为了便于对电路进行分析和计算,常把实际的电路元件加以理想化,在一定条件下忽略其次要电磁性质,用足以表征其主要电磁性质的理想化电路元件来表示。例如,用电阻元件反映电路或器件消耗电能的电磁性质,用电感元件反映电路或器件存储磁场能量的电磁性质,用电容元件反映电路或器件存储电场能量的电磁性质,用电源元件反映电能(电功率)发生器的电磁性质,这样就有了四个理想电路元件,其电路模型如图 1.1.3 所示。

由理想电路元件及其组合来近似代替实际电路元件,从而构成了与实际电路相对应的电路模型。理想电路元件的图形符号是有国家标准的,根据国家标准绘制的电路模型图称为电路图,如图 1.1.4 所示为对手电筒实际电路进行抽象后的电路模型图。 $U_s$  是电压源,这里将干电池的内阻忽略不计; $S$  表示开关; $R$  是电阻元件,表示小灯泡。各个理想元件之间的导线用连线来表示。有了电路图就可以方便地进行电路研究了。今后书中未加特别说明时,所说的电路均指这样抽象的电路模型,所说的元件均指理想电路元件。

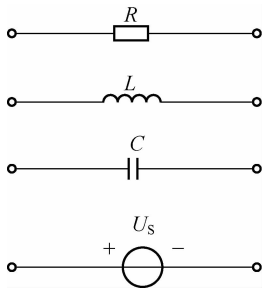


图 1.1.3 四个理想电路元件的电路模型

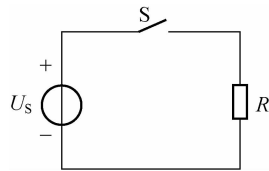


图 1.1.4 手电筒电路模型

## 1.2 电路的基本物理量

电路中的物理量很多,本节主要讨论电路的基本物理量——电流、电压、电位、电动势、电功率和电能。

### 1.2.1 电流

水流是由水分子的定向运动形成的,与之类似,电路中的电荷有规则地定向运动形成了电流。导体中的自由电子、电解液和电离了的气体中的自由离子、半导体中的电子和空穴都属于带电粒子(载流子)。在直流电路中,电流用  $I$  表示;在交流电路中,电流用  $i$  表示。电流在数值上等于单位时间内通过导体某一横截面的电荷量。

在交流电路中,单位时间通过导体横截面的电荷量是变化的,有

$$i = \frac{dq}{dt} \quad (1.2.1)$$

式中,  $dq$  为  $dt$  时间内通过导体横截面的电荷量。

在直流电路中,单位时间通过导体横截面的电荷是恒定不变的,有

$$I = \frac{Q}{t} \quad (1.2.2)$$

国际单位制(SI)中,电荷量的单位为库仑,简称库(C);时间的单位为秒(s);电流的单位为安培,简称安(A),有时也会用到千安(kA)、毫安(mA)、微安( $\mu$ A)等单位。

在分析电路时不仅要计算电流的大小,还应了解电流的方向。习惯上将正电荷移动的方向规定为电流的实际方向。在分析电路时,对复杂电路中某一段电路电流的实际方向有时很难立即判定,有时电流的实际方向还在不断改变,因此,在电路中很难标明电流的实际方向。为了解决这一问题,引入了参考方向的概念。

电流的参考方向是任意选定的,当选定的电流参考方向与实际方向一致时,电流为正值( $i > 0$ );当选定的电流参考方向与实际方向不一致时,电流为负值( $i < 0$ )。可见,在选定参考方向后,电流值才有正负之分,如图 1.2.1 所示。

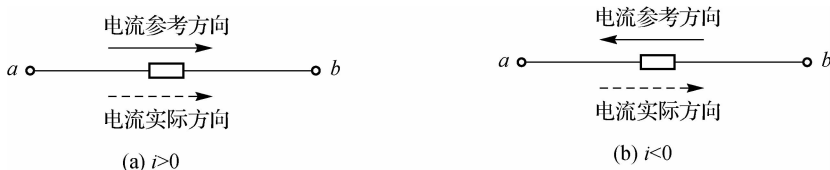


图 1.2.1 电流参考方向与实际方向的关系

在电路中,元件的电流参考方向可用箭头表示,如图 1.2.2 所示。在文字叙述时,也可用电流符号加双下标表示,如  $i_{ab}$ ,它表示电流由  $a$  流向  $b$ ,且有  $i_{ab} = -i_{ba}$ 。

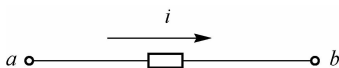


图 1.2.2 电流参考方向的表示

由此可知,在分析电路时,首先要假设电流的参考方向,并以此为标准去分析计算,最后

## ■ 电路基础

从结果的正负来确定电流的实际方向。参考方向一经选定,中途就不能再变。

**例 1.1** 已知电流  $i$  的参考方向如图 1.2.2 所示,求下列两种情况下电流的实际方向:  
(1)  $i=10\text{ A}$ ; (2)  $i=-10\text{ A}$ 。

**解** (1)  $i=10\text{ A}$ , 其值为正, 则电流的实际方向与参考方向相同, 即由  $a$  指向  $b$ 。

(2)  $i=-10\text{ A}$ , 其值为负, 则电流的实际方向与参考方向相反, 即由  $b$  指向  $a$ 。

电流可以用电流表测量, 测量时, 把电流表串联在电路中。选择量程时, 要使电流表指针处于满量程的  $1/3\sim 2/3$ , 这样既可以防止电流过大而损坏电流表, 又可以满足测量精度的要求。

### 1.2.2 电压

河水之所以能够流动, 是因为有水位差。同理, 电荷流动形成电流, 是因为有电位差。电位差也就是电压, 电压是形成电流的原因。

在匀强电场中, 正电荷  $Q$  在电场力  $F$  的作用下由  $a$  点移到  $b$  点, 电场力所做的功为  $W$ , 则  $a$  点到  $b$  点的电压为

$$U = \frac{W}{Q} \quad (1.2.3)$$

同理, 单位正电荷由电路的  $a$  点移到  $b$  点所获得或失去的能量, 称为  $ab$  两点间的电压, 即

$$u = \frac{d\tau}{dq} \quad (1.2.4)$$

式中,  $dq$  为由  $a$  点移到  $b$  点的电荷量;  $d\tau$  为电荷移动过程中所获得或失去的能量;  $u$  为两点间的电压。

规定: 若正电荷从  $a$  点移到  $b$  点, 其电势能减少, 电场力做正功, 电压实际方向从  $a$  到  $b$ 。

在国际单位制中, 功的单位为焦耳, 简称焦(J); 电压的单位为伏特, 简称伏(V), 有时也会用到千伏(kV)、毫伏(mV)、微伏( $\mu\text{V}$ )等单位。

电压和电流一样, 不但有大小, 而且有方向。习惯上规定电压的实际方向是从高电位端(电路中拥有能量相对较高的一端)指向低电位端(电路中拥有能量相对较低的一端)。电压参考方向和电流参考方向一样, 也是任意选定的。在分析电路时, 选定某一方向作为电压方向, 当选定的电压参考方向与实际方向一致时, 电压为正值( $u>0$ ); 当选定的电压参考方向与实际方向不一致时, 电压为负值( $u<0$ ), 如图 1.2.3 所示。

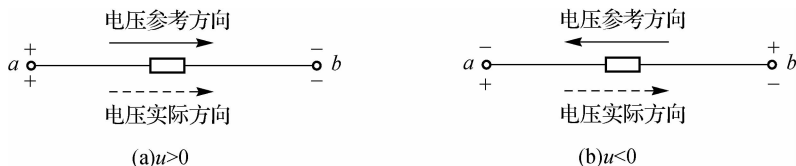


图 1.2.3 电压参考方向与实际方向的关系

电压参考方向可以用“+”和“-”表示极性, 还可以用双下标表示, 如图 1.2.4 所示, 并有  $u_{ab} = -u_{ba}$ 。

**例 1.2** 如图 1.2.5 所示, 电路中电流或电压参考方向已选定。已知:  $I_1 = 5\text{ A}$ ,  $I_2 = -5\text{ A}$ ,  $U_1 = 10\text{ V}$ ,  $U_2 = -10\text{ V}$ , 试指出电流或电压的实际方向。



图 1.2.4 电压参考方向的表示

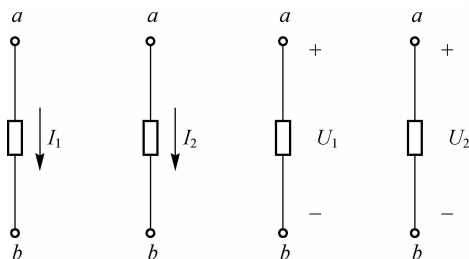


图 1.2.5 例 1.2 图

解  $I_1 > 0$ ,  $I_1$  的实际方向与参考方向相同, 电流  $I_1$  由  $a$  流向  $b$ , 大小为 5 A。

$I_2 < 0$ ,  $I_2$  的实际方向与参考方向相反, 电流  $I_2$  由  $b$  流向  $a$ , 大小为 5 A。

$U_1 > 0$ ,  $U_1$  的实际方向与参考方向相同, 电压  $U_1$  由  $a$  指向  $b$ , 大小为 10 V。

$U_2 < 0$ ,  $U_2$  的实际方向与参考方向相反, 电压  $U_2$  由  $b$  指向  $a$ , 大小为 10 V。

参考方向是电路计算中的一个基本概念, 对此着重指出以下几点:

- (1) 电流、电压的实际方向是客观存在的, 而参考方向是人为选定的。
- (2) 当电流、电压的参考方向与实际方向一致时, 电流、电压值取正号; 反之, 取负号。
- (3) 分析计算每一电流、电压时, 都要先选定其各自参考方向, 否则计算得出的电流、电压正负值是没有意义的。

### 3. 关联参考方向

任一电路的电流参考方向和电压参考方向都可以分别地独立假设。但为了电路分析方便, 常使同一元件的电压参考方向和电流参考方向一致, 即电流从电压的正极性端流入该元件, 而从它的负极性端流出, 电流和电压的这种参考方向称为关联参考方向, 如图 1.2.6(a) 所示; 当电压参考方向和电流参考方向不一致时, 称为非关联参考方向, 如图 1.2.6(b) 所示。

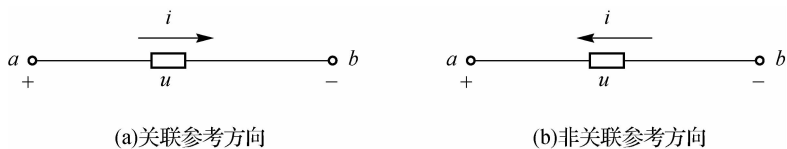


图 1.2.6 关联与非关联参考方向

## 1.2.3 电位

电路中的每一点均有一定的电位, 这就如空间的每一处均有一定的高度一样。为了说明高度, 就必须有一个计算高度的起点, 同样, 为了分析电路中某一点的电位, 也必须预先指定一个计算电位的起点, 称为电位参考点(或称零电位点), 简称参考点。一旦选定了参考点, 电路中各点的电位就可以确定了。

规定电路中某一点的电位就是该点到参考点的电压, 电位的方向则是从该点指向参考

## ■ 电路基础

点。电位常用字母  $V$  加下角标表示,如电路中  $a$  点的电位表示为  $V_a$ 。电位的单位与电压的单位相同,也是伏特(V)。

参考点可以任意选取。参考点的电位规定为零,因而低于参考点的电位是负电位,高于参考点的电位是正电位。工程上常选择大地或机壳作为参考点。

电位与电压的关系可表示为

$$U_{ab} = V_a - V_b \quad (1.2.5)$$

即电路中某两点的电压等于该两点的电位差。

在电路中任选一点为参考点,则某一点  $a$  到参考点的电压就称为  $a$  点的电位,用  $V_a$  表示。根据定义,有

$$V_a = U_{a0} \quad (1.2.6)$$

如图 1.2.7 所示,以电路中的 0 点为参考点,则有

$$\begin{aligned} V_a &= U_{a0}, V_b = U_{b0} \\ U_{ab} &= U_{a0} + U_{0b} = U_{a0} - U_{b0} = V_a - V_b \end{aligned} \quad (1.2.7)$$

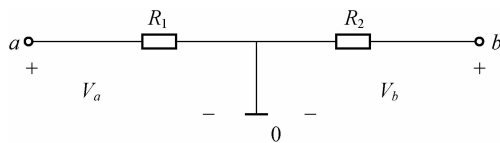


图 1.2.7 电位表示图

式(1.2.7)说明,电路中  $a$  点到  $b$  点的电压等于  $a$  点电位与  $b$  点电位之差。当  $a$  点电位高于  $b$  点电位时,  $U_{ab} > 0$ ; 反之,  $U_{ab} < 0$ 。

一般规定电压的实际方向由高电位点指向低电位点。

参考点是可以任意选定的,一经选定,电路中的各点电位也就确定了。参考点选择不同,电路中各点电位将随参考点的变化而变化,但任意两点间的电压是不变的。

### 1.2.4 电动势

在图 1.1.1 所示电路中,当开关闭合时,正电荷会从电源正极沿导线外电路运动到电源负极,以维持电路中电流的连续流动。电源中一定存在着能使流到电源负极的正电荷移到电源正极的电源力(在电池中,电源力由化学作用产生;在发电机中,电源力由电磁感应作用产生)。电动势就是反映电源把其他形式的能量转换成电能本领的物理量。电源的电动势在数值上等于电源力把单位正电荷从电源的负极经由电源内部移到电源正极所做的功,也就是单位正电荷从电源负极到电源正极所获得的电能。电动势使电源两端产生电压。交、直流电动势分别用  $e$  和  $E$  表示,电动势的单位也是伏特。

电动势也有方向,其实际方向规定为由电源负极(低电位)指向电源正极(高电位),即电位上升的方向。在电路分析中,也常用电压源的电动势大小来表示电压源端电压的大小,如图 1.2.8 所示,但要注意,电压源端电压的实际方向和电动势的实际方向是相反的。

电源的电动势可以用电压表测量。测量时,电源不要连接到电路中,用电压表测量电源两端的电压,所得的电压值就可以视为电源的电动势。如果电源连接到电路中,用电压表测得的电压就会小于电源的电动势。这是因为电源有内阻,在构成闭合电路时内阻会分担部

分电压,造成输出电压小于电源电动势。

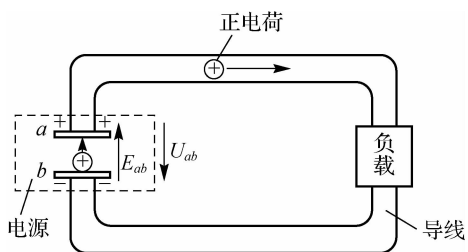


图 1.2.8 电动势和电压

严格来说,即使电源不接入电路,万用表测得的电压也小于电源电动势,这是因为电压表也存在内阻。但电压表内阻很大,而电源内阻很小,故内阻可以忽略。因此,电压表测得的电源两端的电压可以视为电源的电动势。

### 1.2.5 电功率和电能

单位时间做功的大小(做功的速率)称为功率。在电路中使用的电功率就是电场力做功的速率,用符号  $P$  表示。功率的数字定义式为

$$P = \frac{dW}{dt} \quad (1.2.8)$$

式中,  $dW$  为  $dt$  时间内电场力所做的功。在国际单位制中,功率的单位为瓦特,简称瓦(W),此外,还常用到千瓦(kW)、毫瓦(mW)等单位。

对式(1.2.8)进一步推导可得

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{dW}{dq} \cdot \frac{dq}{dt} = ui \quad (1.2.9)$$

即电路的功率等于该段电路电压与电流的乘积。直流时,式(1.2.9)应写为

$$P = UI \quad (1.2.10)$$

由式(1.2.9)可得  $dW = Pdt$ ,因此在  $t_0 \sim t_1$  时间段内,电路消耗的电能应为

$$W = \int_{t_0}^{t_1} P dt \quad (1.2.11)$$

直流时,  $P$  为常数,则有

$$W = P(t_1 - t_0) \quad (1.2.12)$$

在国际单位制中,电能的单位是焦耳,它表示 1 W 用电设备在 1 s 时间内所消耗的电能。实际中还常用千瓦·时(kW·h)作为电能单位,称为 1 度电,即

$$1 \text{ 度电} = 1 \text{ kW} \cdot \text{h} = (1 \times 10^3 \times 3600) \text{ J} = 3.6 \times 10^6 \text{ J}$$

需要强调的是,在电压、电流为关联参考方向时,一段电路所吸收的电功率为该段电路两端电压、电流的乘积。此时,电压和电流均为代数量,有正负之分,将  $U$ 、 $I$  数值代入式(1.2.10)计算。若  $P > 0$ ,说明这段电路上电压与电流的实际方向一致,正电荷在电场力作用下做了功,该段电路吸收功率(消耗功率);若  $P < 0$ ,说明这段电路上电压与电流的实际方向不一致,一定是电源克服电场力做了功,该段电路吸收负功率,即该段电路向外供出功率,或者说产生功率。例如,计算出某段电路的吸收功率为  $-4 \text{ W}$ ,那么也可以说该段电路产生  $4 \text{ W}$  的功率。如果遇到电路中电压、电流为非关联参考方向的情况,在计算吸收功率

## ■ 电路基础

的公式中须加负号,即  $P = -UI$ 。应特别注意根据电压、电流参考方向是否关联来选用相应的吸收功率计算公式。

有时要计算一段电路的产生功率(供出功率),则所用公式与计算吸收功率时的公式相反,即若  $U、I$  为关联参考方向,计算产生功率用  $-UI$ ;若  $U、I$  为非关联参考方向,计算产生功率用  $UI$ 。

**例 1.3** 图 1.2.9 所示为某一电路的一部分,三个元件流过相同的电流  $I$ ,且  $I = -2 \text{ A}$ ,  $U_a = 2 \text{ V}$ 。

(1)求元件 a 的功率  $P_a$ ,并说明是消耗功率还是发出功率;(2)若已知元件 b 发出功率为  $20 \text{ W}$ ,元件 c 消耗功率为  $10 \text{ W}$ ,求  $U_b$  和  $U_c$ 。

**解** (1)元件 a 上电压与电流为非关联参考方向,此时,计算消耗功率的公式应为

$$P_a = -U_a I = -2 \times (-2) = 4 \text{ W}$$

即元件 a 是消耗功率。

(2)元件 b 上电压与电流为关联参考方向,此时,计算消耗功率的公式应为

$$P_b = U_b I = -20 \text{ W}, U_b = \frac{P_b}{I} = \frac{-20 \text{ W}}{-2 \text{ A}} = 10 \text{ V}$$

同理,元件 c 消耗的功率为

$$P_c = U_c I = 10 \text{ W}, U_c = \frac{P_c}{I} = \frac{10 \text{ W}}{-2 \text{ A}} = -5 \text{ V}$$

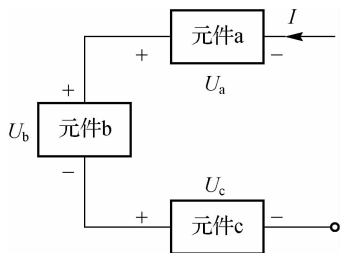


图 1.2.9 例 1.3 图

## 1.3 电阻元件

### 1.3.1 电阻

电荷在电场力的作用下做定向运动时通常要受到阻碍作用,物体对电流的阻碍作用称为该物体的电阻。

物体导电时带电粒子会和原子发生碰撞、摩擦,这种碰撞、摩擦一方面阻碍了带电粒子的定向移动,另一方面将电能转变为热能使物体发热,这种发热所消耗的电能是不可逆转的。物体电阻的大小用电阻量表示,简称电阻,用符号  $R$  表示,单位为欧姆,简称欧( $\Omega$ )。

一段导体电阻的大小由电阻定律确定,即

$$R = \rho \frac{L}{S} \quad (1.3.1)$$

式中, $\rho$  为材料的电阻率,  $\Omega \cdot \text{m}$ ;  $L$  为导体的长度,  $\text{m}$ ;  $S$  为导体的横截面积,  $\text{m}^2$ ;  $R$  为导体的



电阻,  $\Omega$ 。

工程上还常用千欧(k $\Omega$ )、兆欧(M $\Omega$ )等单位,它们之间的关系为

$$1 \text{ M}\Omega = 10^3 \text{ k}\Omega = 10^6 \Omega$$

在电气工程中,可根据不同的用途使用不同的材料制成各种形式的电阻器。当电流流过电阻器时,电阻器会发热并消耗电能,这是所有电阻器的共同特征。但是电路中使用电阻器,主要是利用它阻碍电流的特性。

材料的电阻会随温度变化而变化。当温度升高时,物质分子热运动加剧,自由电子移动受到的阻碍作用增大,电阻值相应增大;但温度升高时,物质中带电粒子数目也增多,更容易导电,电阻值应相应减小。温度升高时,电阻值的增大或减小与材料有关。一类材料,如银、铜、铝、铁、钨等金属,当温度升高时,它们的电阻值增大;另一类材料,如碳、某些半导体材料和电解液等,电阻值随温度升高而减小;第三类材料,如康铜、锰铜等,温度变化时,电阻值变化极小。材料的电阻值随温度的变化是用电阻温度系数  $\alpha$  来表示的, $\alpha$  的值可查阅相关手册。

由于不同材料的电阻温度系数不同,因而它们的使用场合也不同。例如,康铜、锰铜的  $\alpha$  非常小,比较适合于制造标准电阻、电阻箱等;一些材料的温度系数很大,如铜的氧化物、锰和铁等,可将其制成热敏电阻,在电子电路中,一些电子元件因温度变化而工作不稳定,可用热敏电阻来补偿;在工业上,为了测量大范围变化的温度,可使用金属材料(如铂丝)制成的电阻温度计,其测量范围为  $-263 \sim +1\,000 \text{ }^\circ\text{C}$ 。

在使用中要注意电阻器的额定值,一般用额定电阻值和额定功率表示,大型的电阻器也常采用额定电阻与额定电流两个参数表示。

电阻的倒数称为电导,用符号  $G$  表示,即

$$G = \frac{1}{R} \quad (1.3.2)$$

在国际单位制中,电导的单位是西门子,简称西(S)。电导是衡量材料导电能力的参量。材料的电阻越大,电导越小,导电性能越差;反之,材料的电阻越小,电导越大,导电性能越好。有时(如在并联电路中)用电导来分析会比较方便。

### 1.3.2 电阻元件的工作特性

在电路理论中,电阻元件是耗能元件的理想化模型,它是一个二端元件。在讨论各种理想元件的性能时,重要的是要确定其端电压与电流的关系,这种关系称为元件的 VCR,又称为元件约束。当电压与电流为关联参考方向时,如图 1.3.1(a)所示,称为电阻元件的 VCR。

$$u = Ri \quad (1.3.3)$$

式(1.3.3)是著名的欧姆定律,它在电路理论中具有重要的地位,并且应用广泛。从式(1.3.3)还可推出

$$i = \frac{u}{R} \quad (1.3.4)$$

$$R = \frac{u}{i} \quad (1.3.5)$$

$$P = ui = \frac{u^2}{R} = i^2R \quad (1.3.6)$$

应用欧姆定律时,要注意电流的参考方向。如图 1.3.1(b)所示,电阻元件的电压与电流为非关联参考方向,因此有

$$u = -Ri \quad (1.3.7)$$

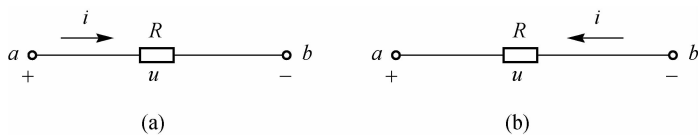


图 1.3.1 电阻元件电压电流关系

**例 1.4** 某电阻元件的阻值为  $10\ \Omega$ , 额定功率  $P_N = 40\ \text{W}$ 。

(1) 当加在电阻两端的电压为  $30\ \text{V}$  时, 该电阻能正常工作吗?

(2) 若要使该电阻正常工作, 外加电压不能超过多少?

**解** (1) 根据式(1.3.4), 流过电阻的电流为

$$i = \frac{u}{R} = \frac{30}{10}\ \text{A} = 3\ \text{A}$$

此时电阻所消耗的功率  $P = ui = 30 \times 3\ \text{W} = 90\ \text{W}$ 。由于  $P$  大于  $P_N$ , 该电阻将烧毁, 不能正常工作。

(2) 根据式(1.3.6), 有

$$P_N = \frac{u^2}{R}$$

$$u = \sqrt{P_N R} = \sqrt{40 \times 10}\ \text{V} = 20\ \text{V}$$

可见, 要使该电阻正常工作, 外加电压不能超过  $20\ \text{V}$ 。

如果把电阻元件的电压作为横坐标, 电流作为纵坐标, 画出一个直角坐标, 该坐标平面称为  $u-i$  平面, 如图 1.3.2 所示, 则电阻元件的电压与电流关系可以用  $u-i$  平面上的一条曲线来表示, 这条曲线称为电阻元件的伏安特性曲线。

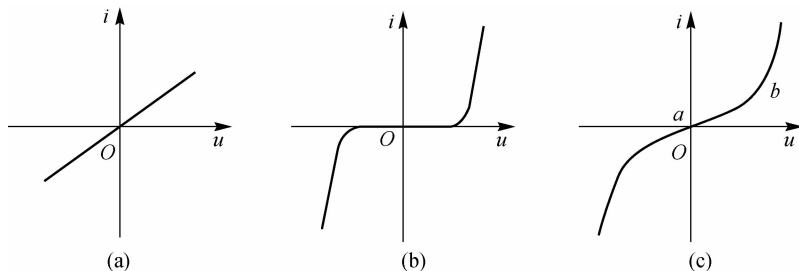


图 1.3.2 电阻元件的伏安特性曲线

可以看出, 在任意时刻都符合欧姆定律的伏安特性曲线是通过  $u-i$  平面原点的一条直线, 如图 1.3.2(a)所示, 具有这种伏安特性的电阻元件称为线性电阻元件。换句话说, 线性电阻元件的电阻值是常数, 其值与元件两端电压或流过的电流无关, 而只与元件本身的材料、尺寸有关。

在工程上, 还有许多电阻元件, 它们的伏安特性是  $u-i$  平面上的一条曲线, 这样的电阻元件称为非线性电阻元件。图 1.3.2(b)所示曲线是二极管的伏安特性, 所以二极管是一个非线性电阻元件。

严格来说, 实际电路器件的电阻都是非线性的。例如, 用钨丝作为灯丝的电灯, 其伏

安特性曲线如图 1.3.2(c)所示,当它在一定范围(图中  $ab$  段)工作时,可近似把它视为线性电阻,而超过此范围,就成了非线性电阻。

今后若未加说明,本书中所有电阻元件均指线性电阻元件。

## 1.4 电源元件

电源是将其他形式的能量转换为电能的装置,它具有两种基本电路模型:一种是电压源,另一种是电流源。

常用电源中有各类电池、发电机和信号源,它们都是二端有源元件。能够独立向外电路提供电能的电源,称为独立电源,它包括电压源和电流源;不能独立向外电路提供电能的电源称为非独立电源,又称受控源。

### 1.4.1 电压源

不管外部电路如何变化,其两端电压总是保持定值或一定的时间函数的电源定义为理想电压源。因此,理想电压源是具有以下特点的理想二端元件:它两端的电压是一确定值或确定的时间函数,不随外电路的变化而变化,即与外电路无关;而流过它的电流则随着外电路的变化而变化,或者说由外电路决定。以后所说的电压源都是理想电压源。

如果电压源的电压是定值,不随时间而变化,则称之为直流电压源或恒压源,用  $U_S$  表示;否则为交流电压源,用  $u_S$  或  $u_S(t)$  表示。

理想电压源在电路中的图形符号如图 1.4.1(a)所示,其中  $U_S$  为电压源的电压,“+”“—”号是其参考极性。图 1.4.1(b)所示是直流电压源的外特性。

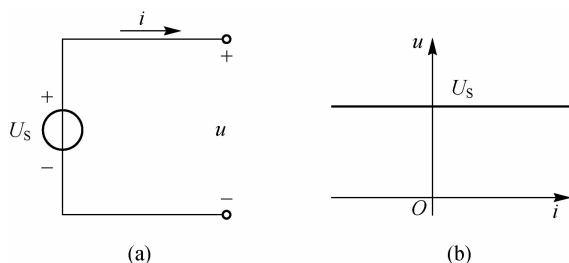


图 1.4.1 电压源模型及直流电压源的外特性

实际上,电源内部总存在一定的内阻。例如,电池是一个实际的直流电压源,当接上负载有电流流过时,内阻就会有能量损耗,电流越大,损耗也越大,端电压就越低,这样,电池就不具有端电压为定值的特点,视电池内阻具有分压作用。因此,实际电压源可以用一个理想电压源  $U_S$  和内阻  $R_S$  相串联的电路模型来表示,如图 1.4.2(a)中的点画线框内所示,图中  $R_L$  为负载,即电源的外电路。有关系式

$$u = U_S - iR_S \quad (1.4.1)$$

式(1.4.1)说明,在接通负载后,实际电压源的端电压  $U$  低于理想电压源的电压  $U_S$ ,图 1.4.2(b)为实际直流电压源的外特性曲线。由此可见,实际电压源的内阻越小,其特性越接近于理想电压源。工程中常用的稳压电源及大型电网在工作时的输出电压基本不随外电路变化,都可近似地看作理想电压源。

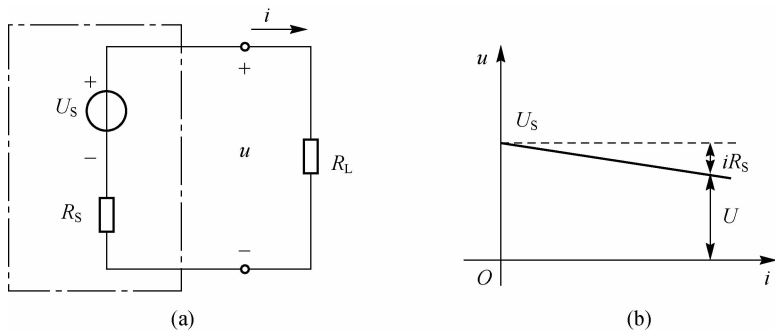


图 1.4.2 实际直流电压源模型及其外特性

**例 1.5** 在图 1.4.3 所示电路中, A 部分电路为理想电压源,  $U_{S1} = 6 \text{ V}$ ; B 部分电路是由可变电阻  $R$  与另一理想电压源  $U_{S2} = 12 \text{ V}$  串联构成, 作为 A 的外部电路。电压  $U$  和电流  $I$  的参考方向如图所示, 试求: (1) 当  $R = 12 \Omega$  时, 电流  $I$  和理想电压源  $U_{S1}$  的吸收功率  $P_{S1}$ ; (2) 当  $R \rightarrow 0$  时, 电流  $I$  和理想电压源  $U_{S1}$  的吸收功率  $P_{S1}$ 。

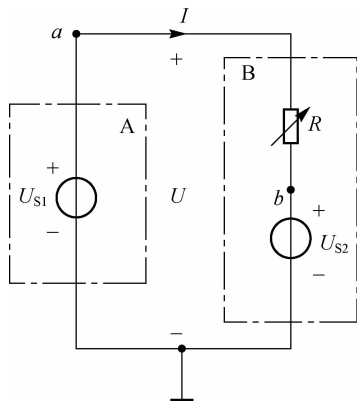


图 1.4.3 例 1.5 图

**解** (1)  $a$  点电位  $V_a = 6 \text{ V}$ ,  $b$  点电位  $V_b = 12 \text{ V}$ , 电压  $U_{ab} = V_a - V_b = 6 - 12 = -6 \text{ V}$ , 根据欧姆定律, 得电流为

$$I = \frac{U_{ab}}{R} = \frac{-6}{12} \text{ A} = -0.5 \text{ A}$$

对  $U_{S1}$  电压源来说,  $U, I$  参考方向非关联, 所以  $U_{S1}$  吸收功率为

$$P_{S1} = -U_{S1} I = -6 \times (-0.5) \text{ W} = 3 \text{ W}$$

此时,  $U_{S1}$  不起电源作用, 事实上它成了  $U_{S2}$  的负载。

(2) 当  $R \rightarrow 0$  时, 显然有

$$U = U_{S1} = 6 \text{ V}$$

$$I = \frac{U_{ab}}{R} \rightarrow \infty$$

此时  $U_{S1}$  吸收功率为

$$P_{S1} = -UI \rightarrow \infty$$

由此可以看出,  $U_{S1}$  流出的电流为负值, 在  $R \rightarrow 0$  的极端情况下,  $U_{S1}$  电压源吸收功率理论上为无穷大。

### 1.4.2 电流源

不管外部电路如何变化, 其两端电流总是保持定值或一定的时间函数的电源定义为理想电流源。因此, 理想电流源是具有以下特点的理想二端元件: 它输出的电流是确定值或确定的时间函数, 不随外电路的变化而变化, 即与外电路无关; 而端电压随着外电路的变化而变化, 或者说由外电路决定。以后所说的电流源都是理想电流源。

如果电流源的电流是定值, 不随时间而变化, 则称之为直流电流源或恒流源, 用  $I_S$  表示; 否则为交流电流源, 用  $i_S$  或  $i_S(t)$  表示。

理想电流源的特点是: 它向外输出的电流是定值  $I_S$  或是一定的时间函数  $i_S(t)$ , 而与它的端电压无关; 它的端电压由与之相连接的外电路确定。

理想电流源在电路中的图形符号如图 1.4.4(a) 所示, 其中  $I_S$  为电流源输出的电流, 箭头标出了它的参考方向。图 1.4.4(b) 所示为直流电流源的外特性。

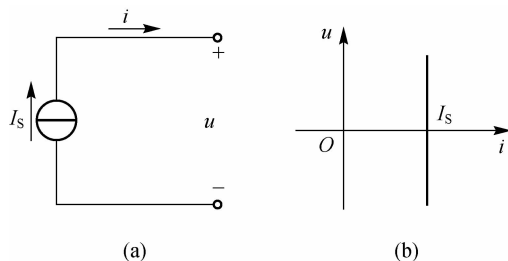


图 1.4.4 电流源模型及直流电流源的外特性

在日常生活中, 常常看到手表、计算器、热水器等采用太阳能电池作为电源, 这些太阳能电池是用硅、砷化镓等材料制成的半导体器件。它与干电池不同, 当受到太阳光照射时, 将激发产生电流, 该电流与入射光强度成正比, 基本不受外电路影响。因此, 像太阳能电池这类电源, 在电路中可以用电流源模型来表示。实际上, 由于内电导的存在, 电流源中的电流并不能全部输出, 有一部分将从内部分流掉。因此, 实际电流源可用一个理想电流源  $I_S$  与内电导  $G_S$  相并联的电路模型来表示。在图 1.4.5(a) 中, 点画线框内为一实际直流电流源的电路模型。很显然, 该实际电流源输出到外电路中的电流  $I$  小于电流源电流  $I_S$ , 并有关系式

$$I = I_S - G_S U \quad (1.4.2)$$

图 1.4.5(b) 所示为实际直流电流源的外特性。实际直流源的内电导越小, 内部分流越小, 其特性就越接近理想电流源。晶体管稳流电源及光电池等器件在工作时可近似看作理想电流源。

**例 1.6** 在图 1.4.6 所示电路中, A 部分电路为理想直流电流源,  $I_S = 4 \text{ A}$ , B 部分电路为可变负载电阻  $R$ , 作为理想电流源  $I_S$  的外电路。设  $U$ 、 $I$  的参考方向如图所示。求: (1)  $R=0$  时的电流  $I$ 、电压  $U$  及电流源  $I_S$  产生的功率  $P_S$ ; (2)  $R=2 \Omega$  时的电流  $I$ 、电压  $U$  及电流源  $I_S$  产生的功率  $P_S$ ; (3)  $R \rightarrow \infty$  时的电流  $I$ 、电压  $U$  及电流源  $I_S$  产生的功率  $P_S$ 。

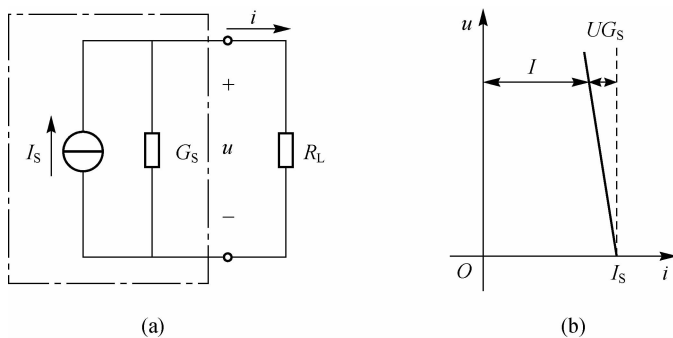


图 1.4.5 实际直流电流源模型及其外特性

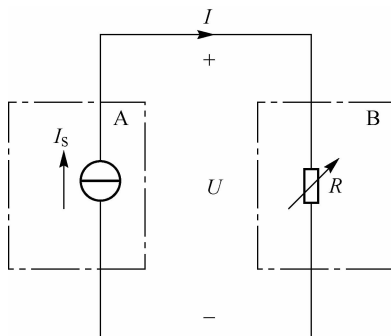


图 1.4.6 例 1.6 图

解 (1) 当  $R=0$  时, 外部电路短路,  $I_s$  为理想电流源, 所以电流为

$$I = I_s = 4 \text{ A}$$

由欧姆定律得电压

$$U = RI = 0 \times 4 \text{ V} = 0 \text{ V}$$

对电流源  $I_s$  来说,  $I$  和  $U$  参考方向非关联, 所以电流源  $I_s$  产生的功率为

$$P_s = UI = 0 \times 4 \text{ W} = 0 \text{ W}$$

(2) 当  $R=2 \Omega$  时, 电流为

$$I = I_s = 4 \text{ A}$$

电压为

$$U = RI = 2 \times 4 \text{ V} = 8 \text{ V}$$

电流源  $I_s$  产生的功率为

$$P_s = UI = 8 \times 4 \text{ W} = 32 \text{ W}$$

(3) 当  $R \rightarrow \infty$  时, 根据理想电流源定义, 有

$$I = I_s = 4 \text{ A}$$

电压为

$$U = IR \rightarrow \infty$$

电流源  $I_s$  产生的功率为

$$P_s = UI \rightarrow \infty$$

由例 1.6 可以看出:理想电流源的输出电流不随外电路变化而变化,本例中三种情况的输出电流  $I=I_s=4\text{ A}$ ;理想电流源的端电压  $U$  随外部电路变化而变化,本例中,当  $R\rightarrow\infty$  时,  $U\rightarrow\infty$ ,从而使  $I_s$  产生的功率  $P_s\rightarrow\infty$ 。

综上所述,理想电压源的输出电压及理想电流源的输出电流都不随外电路的变化而变化,它们都是独立电源。在实际电路分析中,若没有特殊说明,可以把实际电压源和电流源当作理想电压源和电流源去处理。它们在电路中作为电源或信号源作用于电路,称为激励。在激励作用下,电路各部分便产生电压和电流,这些电压和电流称为在激励作用下的响应。电路分析实际上就是分析在给定激励下电路中各元件上的响应。

### 1.4.3 受控源

若电压源电压的大小和极性、电流源电流的大小和方向都不是独立的,而是受电路中其他电压或电流的控制,则此种电压源和电流源称为非独立电压源和非独立电流源,也称受控电压源或受控电流源,统称为受控电源,简称受控源。受控源的电路符号为菱形,如图 1.4.7 所示,以与独立源的电路符号相区别。

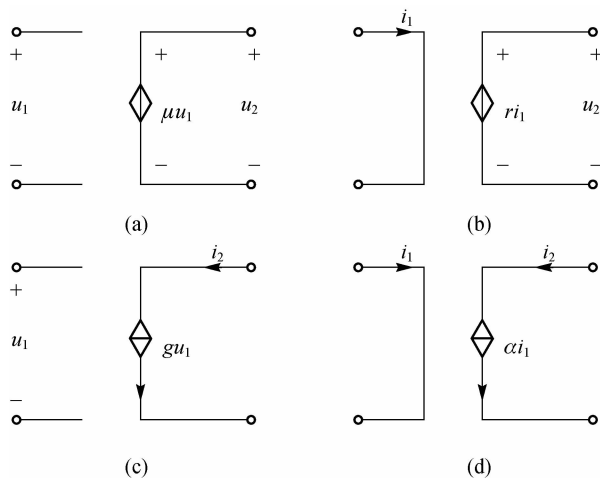


图 1.4.7 受控源及其分类

#### 1. 受控源的分类

受控源向外有两对端钮,一对为输入端钮,另一对为输出端钮,输入端钮施加控制电压或控制电流,输出端钮则输出被控电压或电流。因此,理想的受控源电路可分为以下四种:

(1) 电压控制电压源 (VCVS), 见图 1.4.7(a)。其中,  $u_1$  为控制量,  $u_2$  为被控制量,  $u_2 = \mu u_1$ ,  $\mu = \frac{u_2}{u_1}$  为控制因子,  $\mu$  为无量纲的电压比因子。

(2) 电流控制电压源 (CCVS), 见图 1.4.7(b)。其中,  $i_1$  为控制量,  $u_2$  为被控制量,  $u_2 = r i_1$ ,  $r = \frac{u_2}{i_1}$  为控制因子, 单位为欧姆 ( $\Omega$ )。

(3) 电压控制电流源 (VCCS), 见图 1.4.7(c)。其中,  $u_1$  为控制量,  $i_2$  为被控制量,  $i_2 = g u_1$ ,  $g = \frac{i_2}{u_1}$  为控制因子, 单位为西门子 (S)。

(4) 电流控制电流源(CCCS), 见图 1.4.7(d)。其中,  $i_1$  为控制量,  $i_2$  为被控制量,  $i_2 = \alpha i_1$ ,  $\alpha = \frac{i_2}{i_1}$  为控制因子,  $\alpha$  为无量纲的电流比因子。

受控源实际上是有源器件(电子管、晶体管、场效应管、运算放大器等)的电路模型。

## 2. 受控源的性质

(1) 电源性。由于受控源也是电源, 因此它在电路中与独立源具有同样的外特性, 其处理原则也与独立源相同。但应注意, 受控源与独立源在本质上不相同, 独立源在电路中直接起激励作用, 而受控源则不是直接起激励作用, 它仅表示控制量与被控制量的关系。控制量存在, 则受控源就存在; 若控制量为零, 则受控源也为零。

(2) 电阻性。受控源可等效为一个电阻, 而且此电阻可能为正值, 也可能为负值。

## 3. 受控源在电路分析中的处理原则

由于受控源在电路中的作用具有两重性, 因而受控源在电路分析中的处理原则有两个。

(1) 受控源与独立源同样对待和处理。

(2) 把控制量用待求的变量表示, 作为辅助方程。

**例 1.7** 在图 1.4.8 所示电路中,  $\mu = 0.4$ , 求  $i_2$  和受控电压源发出的功率  $P_{\text{发}}$ 。

**解** 这是一个含有受控电压源的电路, 其中

$$u_1 = 2 \times 4 \text{ V} = 8 \text{ V}$$

$$u_2 = \mu u_1 = 0.4 \times 8 \text{ V} = 3.2 \text{ V}$$

$$i_2 = \frac{u_2}{4} = \frac{3.2}{4} \text{ A} = 0.8 \text{ A}$$

$$P_{\text{发}} = \mu u_1 i_2 = 3.2 \times 0.8 \text{ W} = 2.56 \text{ W}$$

由于  $P_{\text{发}} = 2.56 \text{ W} > 0$ , 故受控电压源  $\mu u_1$  在电路中起电源即产生电能的作用。

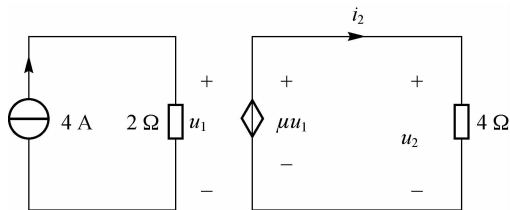


图 1.4.8 例 1.7 图

## 1.5 基尔霍夫定律

前面几节研究了几种基本电路元件的电压和电流的关系, 这些都属于元件约束关系。而当若干电路元件构成一个整体电路后, 各元件还要受到电路结构的约束关系, 这就是本节要介绍的基尔霍夫定律。基尔霍夫定律阐明了任意电路中各处电压和电流的内在关系, 它包含两个定律: 一是研究电路中各节点电流间联系的规律, 称为基尔霍夫电流定律; 另一个是研究各回路电压之间联系的规律, 称为基尔霍夫电压定律。它们是分析和计算电路的理论基础。



### 1.5.1 相关的电路名词

#### 1. 支路

按狭义的定义,把通过同一电流的电路称为支路,在图 1.5.1 中, $abc$ 、 $adc$ 、 $aec$  均为支路, $ae$  则不是支路。支路  $abc$ 、 $adc$  中既有电阻又有电源,称为有源支路;支路  $aec$  中只有电阻而无电源,称为无源支路。支路是电路的基石。

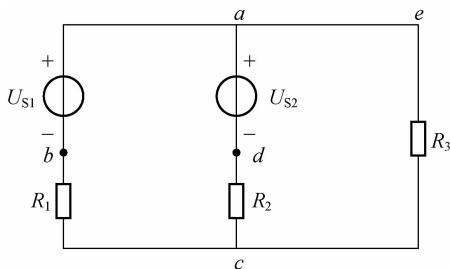


图 1.5.1 电路名词定义用图

#### 2. 节点

按狭义的定义,把三条和三条以上支路的连接点称为节点。在图 1.5.1 中, $a$  点和  $c$  点都是节点。但要注意,有时也把两个电路元件的连接点称为节点,图中的点  $b$ 、 $d$ 、 $e$  都可视为节点。

#### 3. 回路

由支路构成的闭合路径称为回路。在图 1.5.1 中, $cbadc$ 、 $aecda$ 、 $aecba$  都是回路。

#### 4. 网孔

内部不含支路的回路称为网孔。在图 1.5.1 中, $adcba$ 、 $aecda$  都是网孔, $baecb$  不是网孔。

#### 5. 网络

网络就是电路,但一般把较复杂的电路称为网络。

### 1.5.2 基尔霍夫电流定律

基尔霍夫定律是德国科学家基尔霍夫在 1845 年论证的,它由电流定律和电压定律组成。基尔霍夫电流定律(Kirchhoff's Current Law, KCL)的内容为:任一时刻在电路的任一节点上,所有支路电流的代数和恒等于零。规定流出节点的电流前面取“+”,流入节点的电流前面取“-”。而电流是流入节点还是流出节点,均按其参考方向来判断。如图 1.5.2 所示,对节点  $a$ ,有

$$-I_1 + I_2 - I_3 + I_4 + I_5 = 0 \quad (1.5.1)$$

写成一般形式为

$$\sum I = 0 \text{ 或 } \sum i = 0 \quad (1.5.2)$$

式(1.5.1)可以整理为

$$I_2 + I_4 + I_5 = I_1 + I_3 \quad (1.5.3)$$

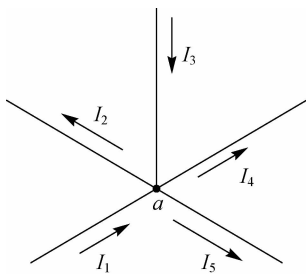


图 1.5.2 KCL 说明

基尔霍夫电流定律表明:在任一时刻,流入任一节点的电流之和等于流出该节点的电流之和。

基尔霍夫电流定律是对电流连续性这一物理现象的数学描述,其实质是电荷守恒原理,即任一时刻流入支路横截面的电荷量必定等于该时刻从支路横截面流出的电荷量。这也符合电路中同一条支路中的各处电流都相等的原理。

**例 1.8** 在图 1.5.2 所示电路,已知  $I_1=2\text{ A}$ ,  $I_2=1\text{ A}$ ,  $I_3=-3\text{ A}$ ,  $I_4=-1\text{ A}$ , 试求  $I_5$ 。

**解** 根据 KCL 有

$$-I_1 + I_2 - I_3 + I_4 + I_5 = 0$$

代入已知数据得

$$-2 + 1 - (-3) + (-1) + I_5 = 0$$

$$I_5 = -1\text{ A}$$

$I_5$  为负值,说明  $I_5$  的实际方向与参考方向相反,是流入节点  $a$ 。

KCL 通常用于节点,但把它加以推广,也可适用于包围许多节点的闭合曲面。例如,在图 1.5.3 所示电路中,闭合曲面  $S$  内部有三个节点①、②、③,当设定各支路电流的大小和参考方向如图所示时,则对此三个节点可写出 KCL 方程为

$$I_1 = I_{12} - I_{31}, I_2 = I_{23} - I_{12}, I_3 = I_{31} - I_{23}$$

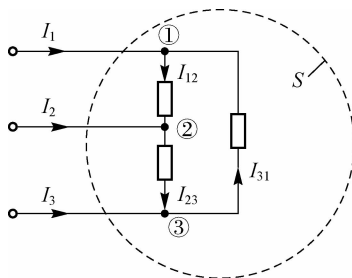


图 1.5.3 KCL 推广闭合曲面

将上述三式相加得

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

写成一般形式为

$$\sum I(t) = 0 \tag{1.5.4}$$

即流入(或流出)一个闭合曲面  $S$  的所有支路电流的代数和恒等于零,这就是广义的 KCL。

在写此方程时,若把流入闭合曲面  $S$  的电流规定为“+”,则流出闭合曲面  $S$  的电流为“-”。

### 1.5.3 基尔霍夫电压定律

基尔霍夫电压定律(Kirchhoff's Voltage Law, KVL)可叙述为:在任一时刻,沿任一回路各段电压的代数和恒等于零,即

$$\sum U = 0 \text{ 或 } \sum u = 0 \quad (1.5.5)$$

根据式(1.5.5)列方程,首先需要选定回路的绕行方向。凡元件或支路的电压参考方向与绕行方向一致的,该电压取“+”,反之取“-”。图 1.5.4 给出了某电路的一个回路,先选定图中所示绕行方向,即从  $a$  点出发绕行一周,有

$$U_{ab} + U_{bc} + U_{cd} + U_{da} = 0 \quad (1.5.6)$$

又因为

$$U_{ab} = U_{S1} + I_1 R_1$$

$$U_{bc} = -I_2 R_2$$

$$U_{cd} = -I_3 R_3 - U_{S3}$$

$$U_{da} = I_4 R_4$$

代入式(1.5.6)中,整理得

$$I_1 R_1 - I_2 R_2 - I_3 R_3 + I_4 R_4 = -U_{S1} + U_{S3}$$

写成一般形式为

$$\sum IR = \sum U_s \quad (1.5.7)$$

式(1.5.7)表明,对于电阻电路,KVL 的另一种表述是:在任一时刻,在任一闭合电路中,所有电阻电压的代数和等于所有电压源电压的代数和。采用式(1.5.7)来列方程时,若流过电阻的电流参考方向与绕行方向一致,则该电阻电压前面取“+”,反之取“-”;若电压源方向与绕行方向相反,该电压源取“+”,反之取“-”。

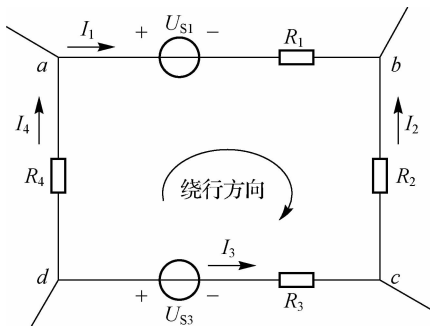


图 1.5.4 KVL 图示与应用

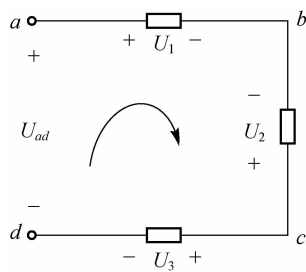


图 1.5.5 KVL 的推广与应用

KVL 不仅适用于闭合回路,还可以推广到广义回路。在图 1.5.5 所示电路中,在  $ad$  处开路,如果将开路电压  $U_{ad}$  添加上,就形成一个回路。

沿  $abcd a$  绕行一周,列出回路电压方程为

$$U_1 - U_2 + U_3 - U_{ad} = 0$$

整理得

$$U_{ad} = U_1 - U_2 + U_3$$

有了 KVL 这个推论就可以很方便地求出电路中任意两点间的电压。

**例 1.9** 图 1.5.6 所示为某电路中的一个回路,通过  $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $d$  四个节点与电路的其他部分相连接,图中已标注出部分已知的元件参数及支路电流,求未知参数  $R$  及电压  $U_{ac}$ 、 $U_{bd}$ 。

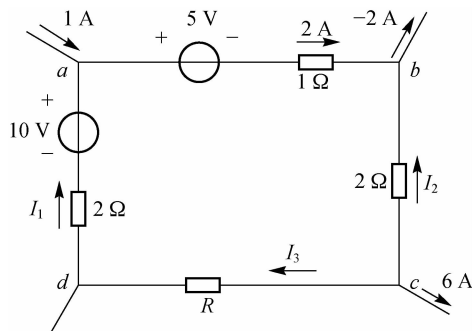


图 1.5.6 例 1.9 电路图

**解** 先设未知电流  $I_1$ 、 $I_2$ 、 $I_3$ , 如图所示。

对于节点  $a$ , 根据 KCL 有关系式  $-1+2-I_1=0$ , 解得  $I_1=1$  A。

对于节点  $b$ , 有关系式  $-2+(-2)-I_2=0$ , 解得  $I_2=-4$  A。

对于节点  $c$ , 有关系式  $I_2+6+I_3=0$ ,  $I_3=-I_2-6=-(-4+6)$  A =  $-2$  A。

再按  $abcd$  绕行, 列回路电压方程为

$$5 + 1 \times 2 - 2I_2 + I_3R + 2I_1 - 10 = 0$$

代入  $I_1$ 、 $I_2$ 、 $I_3$  值, 解得  $R=3.5$  Ω。

根据 KVL 可得

$$U_{ac} = U_{ab} + U_{bc} = 5 + 1 \times 2 - 2I_2 = [5 + 2 - 2 \times (-4)] \text{ V} = 15 \text{ V}$$

$$U_{bd} = U_{bc} + U_{cd} = -2I_2 + RI_3 = [-2 \times (-4) + 3.5 \times (-2)] \text{ V} = 1 \text{ V}$$

## 1.6 电路的工作状态

电路在工作时会出现几种不同的工作状态, 本节主要讨论电路在开路、短路和在额定状态工作时的特征。

### 1.6.1 开路状态

要保证电路正常工作, 必须要求电路构成一个闭合路径, 然而闭合路径中的任何一处都可能断开, 从而导致电路无法工作, 这种情况称为开路状态。在开路状态下, 电源与负载未构成闭合路径, 此时电流  $I=0$ , 断开处的电压称为开路电压, 用  $U_{OC}$  表示。开路有时也称为断路。

如图 1.6.1 所示, 当开关 S 未接通时, 电路中负载不工作, 电流  $I=0$ , 电源的端电压即为开路电压  $U_{OC}$ 。

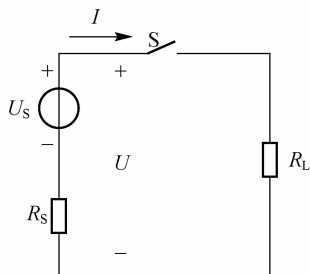


图 1.6.1 电路开路图

在实际生活中,用开关控制电灯的亮与灭。当合上开关后灯泡不亮,说明电路中有开路(断路),即电路中某一处断开了,没有电流通过。

开路的特点:开路状态电流为零,负载不工作, $U=IR=0$ ,而开路处的端电压 $U_{OC}=U_s$ 。

**例 1.10** 如图 1.6.2 所示,当开关 S 接通后发现电流表的读数为零,用万用表测得 $U_{ae}=10\text{ V}$ ,说明外电路开路,试确定电路的开路点。

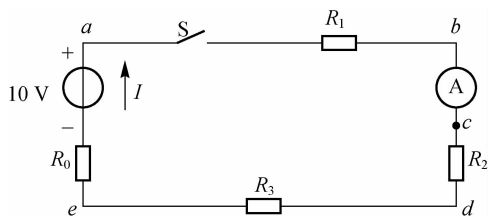


图 1.6.2 例 1.10 图

**解** 根据电源空载时 $I=0$ 和 $U_{OC}=U_s$ 的特点,可用万用表直流电压挡来测试判定。将万用表的黑表笔放在 $e$ 点,红表笔放在 $a$ 点,依题意测得 $U_{ae}=10\text{ V}$ 。黑表笔固定在 $e$ 点,移动红表笔测量,如果测得 $U_{be}=10\text{ V}$ ,则表示 $ab$ 一段是连通的。再移动红表笔,如果测得 $U_{ce}=0$ ,则表明开路点在 $bc$ 之间。因为当 $bc$ 之间开路时, $c$ 点与 $e$ 点的电位相等,即 $U_{ce}=0$ ,如果测得 $U_{ce}$ 仍为 $10\text{ V}$ ,则表明 $bc$ 段是连通的。如此依次测量,便可找到开路点。

## 1.6.2 短路状态

电路中的某两点没有经过负载而直接由导线连在一起的状态,称为短路状态。此导线称为短路线,流过短路线的电流称为短路电流,用 $I_{sc}$ 表示。

短路可分为有用短路和故障短路。例如,在测量电路中的电流时常将电流表串联到电路中,为了保护电流表,在不需要用电流表测量时,用闭合开关将电流表两端短路,这种做法称为有用短路;由于接线不当,或线路绝缘老化损坏等情况,使电路中本不应该连接的两点相连,造成电路故障的情况称为故障短路(见图 1.6.3),其中最严重的是电源短路。例如,实际生活中用开关控制电灯的亮与灭,当合上开关时,电源保险丝很快被烧坏,这是因为电路中有短路,造成电流急剧增大,从而烧毁了保险丝。

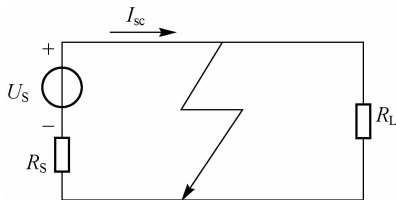


图 1.6.3 电路故障短路图

电路在短路时,由于电源内阻很小,电流  $I_{sc} = \frac{U_s}{R_s}$  会很大,其瞬间放热量很大,从而大大超过线路正常工作时的发热量,不仅能烧毁绝缘层,而且有可能使金属熔化,引起可燃物燃烧,进而发生火灾。因此,在实际工作中要经常检查电气设备的使用情况和导线的绝缘情况,避免短路故障的发生。

### 1.6.3 额定工作状态

电路器件和电气设备所能承受的电压和电流有一定的限度,其工作电压、电流、功率都有一个规定的正常使用的数值,这一数值称为设备的额定值。电气设备在额定值工作时的状态称为额定工作状态。

例如,一盏电灯上标注的电压 220 V、功率 100 W 就是它的额定值。大多数电气设备(如电灯、电炉等)的使用寿命与其绝缘材料的耐热性能及绝缘强度有关。当电流超过额定值过多时,由于电气设备发热速度远远大于散热速度,设备的温度将很快上升,致使绝缘层迅速老化、损坏;而当所加电压超过额定值过多时,绝缘材料可能被击穿。对电灯、电炉和电阻器来说,当电压过高或电流过大时,其灯丝或电阻丝也将被烧毁;反之,如果电压或电流远低于其额定值,电气设备将无法在正常的情况下工作,就不能发挥其自身潜力。一般来说,电气设备在额定工作状态时是最经济合理和安全可靠的,并能保证电气设备有一定的使用寿命。

电气设备的额定值常标在铭牌上或写在说明书中。额定电压、额定电流、额定功率和额定电阻分别用  $U_N$ 、 $I_N$ 、 $P_N$  和  $R_N$  表示。习惯上,电气开关标注  $U_N$  和  $I_N$ ;电烙铁、电炉等标注  $U_N$  和  $P_N$ ;一般金属膜电阻和线绕电阻标注  $P_N$  和  $R_N$ ;电机专用的铸铁调速电阻标注  $I_N$  和  $R_N$ 。

**例 1.11** 有一额定值为 5 W、500  $\Omega$  的电阻,试求其额定电流  $I_N$  和额定电压  $U_N$  的值。

**解** 根据  $P_N = U_N I_N = I_N^2 R_N$ ,得

$$I_N = \sqrt{\frac{P_N}{R_N}} = \sqrt{\frac{5}{500}} \text{ A} = 0.1 \text{ A}$$

$$U_N = I_N R_N = 0.1 \times 500 \text{ V} = 50 \text{ V}$$

对于电源来说,当电源输出的电压和电流均为额定值时,电源便达到了额定工作状态,或称满载。当继续增加负载时,电源输出的电流将超过额定值,这时称为过载;小于额定值时称为欠载。例如,一般导线最高允许工作温度为 65  $^{\circ}\text{C}$ ,如果导线流过的电流超过了安全电流,就称导线过载。此时,过高的温度也使绝缘迅速老化甚至使线路燃烧。发生过载的主要原因有导线截面选择不当,实际负载已超过了导线的安全电流;又如,线路中接入了过多

的大功率设备,超过了配电线路的负载能力。例如,在公共建筑物或者居住场所的照明线路中,有的导线或电缆可能长时间处于过载状态,对这些线路都应采取过载保护。

## 本章小结

### 1. 分析电路的一般方法

理想电路元件是指实际元件的理想化模型,由理想元件构成的电路称为电路模型。在电路分析中,都是用电路模型来代替实际电路进行分析与研究的。

### 2. 电流、电压和电功率

电路中的主要物理量是指电流、电压和电功率。

(1)在计算电流时,首先要设定电流的参考方向,一般用实线箭头表示。如果计算结果  $I$  为正值,表示实际方向与参考方向相同,若为负值表示相反。

(2)电压的参考方向一般用“+”“-”极性表示,如果计算结果  $U$  为正值,表示实际方向与参考方向相同,若为负值表示相反。

(3)在  $U$  与  $I$  为关联参考方向时,电功率  $P=UI$ ,并且  $P>0$  表示元件吸收(或消耗)功率, $P<0$  表示元件输出(或提供)功率。

### 3. 元件的约束关系

(1)电阻  $R$  是反映元件对电流有一定阻碍作用的一个参数,线性电阻在电压  $u$  与电流  $i$  为关联参考方向时有  $u=Ri$ ,即欧姆定律。电阻的功率  $P=ui=Ri^2=Gu^2$ 。

(2)直流理想电压源是一个二端元件,它的端电压是一固定值,用  $U_s$  表示,通过它的电流由外电路决定。

(3)直流理想电流源是一个二端元件,它向外电路提供一恒定电流,用  $I_s$  表示,它的端电压由外电路决定。

实际电压源模型用一理想电压源与一电阻串联的组合模型表示,在实际使用中不允许短路;实际电流源模型用一理想电流源与一电阻并联的组合模型表示,实际使用中不允许开路。

### 4. 电路互联的约束关系

基尔霍夫定律是分析电路的最基本定律,它贯穿整个电路。

(1)KCL 是对电路中任一节点而言的,运用 KCL 方程  $\sum I = 0$  时,应事先选定各支路电流的参考方向,规定流入节点的电流为正(或为负),流出节点的电流为负(或为正)。

(2)KVL 是对电路中任一回路而言的,运用 KVL 方程  $\sum U = 0$  时,应事先选定各元件上电压参考方向及回路绕行方向,规定当电压方向与绕行方向一致时取正号,否则取负号。

(3)基尔霍夫定律的应用,是分析、计算复杂电路的一种最基本方法。

### 5. 电路中电位的分析

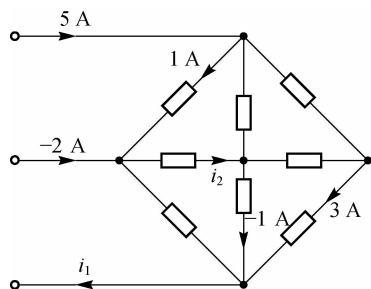
电路中各点电位的分析是欧姆定律、KCL、KVL 的一种应用。在电子线路中经常用到,是一种十分有用的分析方法。电路中某点的电位是指该点到电路中参考点之间的电压,因此,电位是相对概念。参考点选择不同,电路中各点的电位值也随之而变。计算某点的电位,实际上是计算该点到参考点的电压。

## 习 题

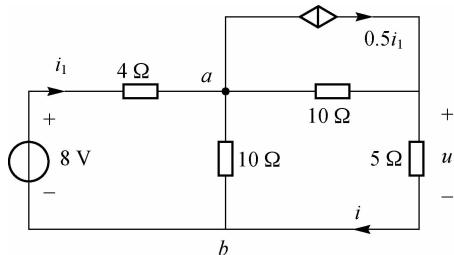
1.1 电烤箱的电阻为  $16\ \Omega$ , 工作电压为  $220\ \text{V}$ , 求其电流。

1.2 电路如题图 1.1 所示, 求电流  $i_1$ 、 $i_2$ 。

1.3 电路如题图 1.2 所示, 求电压  $u$ 。

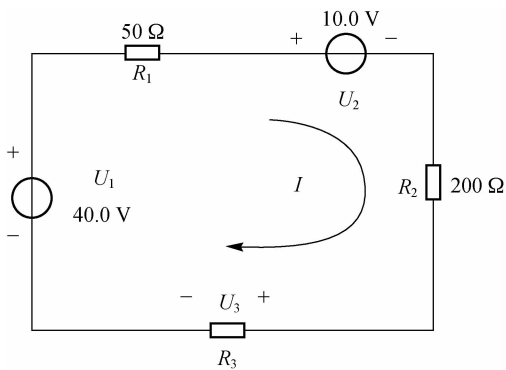


题图 1.1



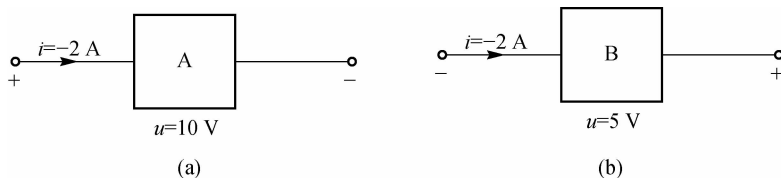
题图 1.2

1.4 题图 1.3 所示电路中电流  $I$  为  $40\ \text{mA}$ , 求电压  $U_3$  和电阻  $R_3$  的值。



题图 1.3

1.5 计算并分析题图 1.4 所示电路中元件 A 和 B 的功率。

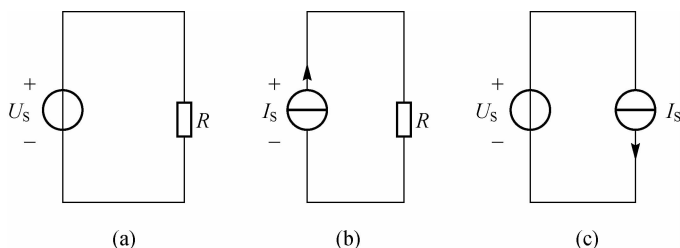


题图 1.4

1.6 一个标明  $220\ \text{V}$ 、 $40\ \text{W}$  的电阻负载如果接在  $110\ \text{V}$  的电路上, 其实际消耗的功率为多少?

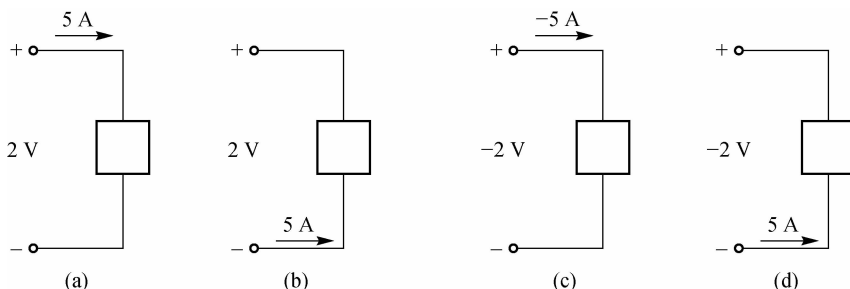


1.7 电路如题图 1.5 所示,  $U_S=8\text{ V}$ ,  $I_S=5\text{ A}$ ,  $R=4\ \Omega$ , 求各元件的电流、电压、功率。



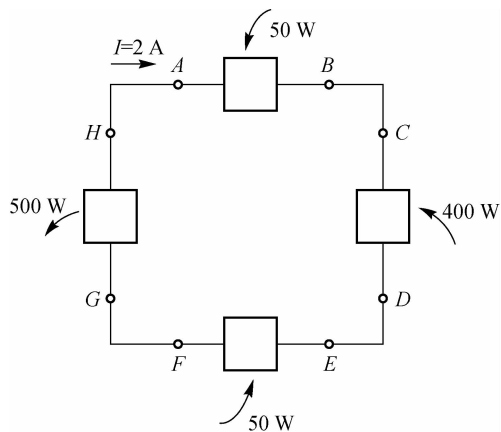
题图 1.5

1.8 计算题图 1.6 所示各元件的功率, 并判断该元件是吸收功率还是发出功率。



题图 1.6

1.9 题图 1.7 中, 功率箭头指向元件, 设元件为吸收功率, 功率箭头背离元件, 设元件为发出功率。试标出各元件上电压的参考方向与实际方向, 并计算电压值。

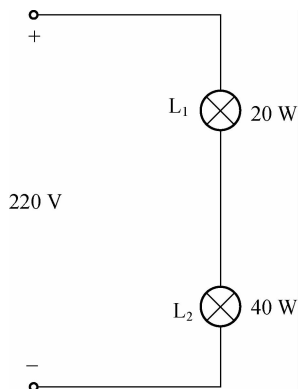


题图 1.7

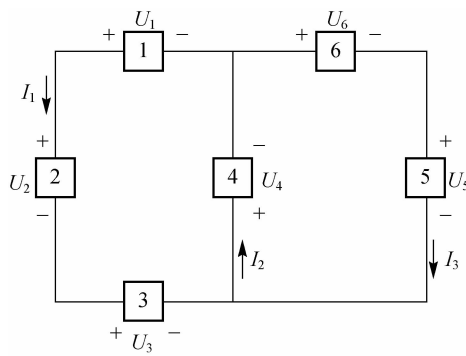
1.10 题图 1.8 所示电路,  $L_1$  为  $20\text{ W}$  电灯泡,  $L_2$  为  $40\text{ W}$  电灯泡, 两个灯泡串联接到  $220\text{ V}$  电源上, 问哪个灯泡亮? 为什么?

1.11 题图 1.9 所示电路中, 方框代表电源或电阻。若各电压、电流的参考方向如图中所示,  $I_1=2\text{ A}$ ,  $I_3=-1\text{ A}$ ,  $U_1=1\text{ V}$ ,  $U_2=8\text{ V}$ ,  $U_4=-4\text{ V}$ ,  $U_5=7\text{ V}$ 。求  $I_2$ 、 $U_3$ 、 $U_6$ , 并标出各电流的真实方向及各电压的真实极性。

■ 电路基础

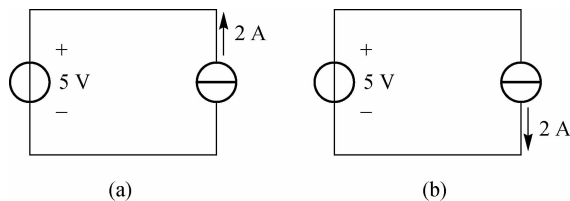


题图 1.8



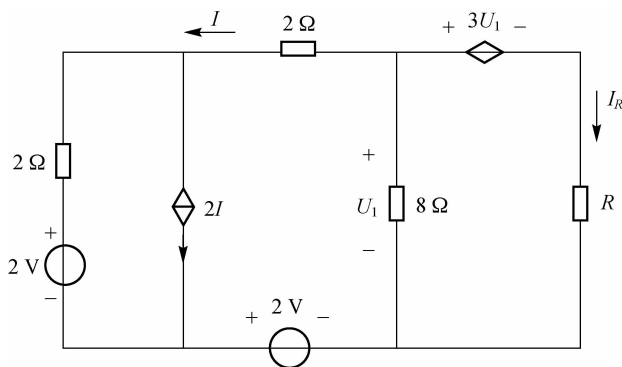
题图 1.9

1.12 将电压源  $U=5\text{ V}$  和电流源  $I_S=2\text{ A}$  分别如题图 1.10(a)和题图 1.10(b)所示方式连接,试计算电压源、电流源的功率,并说明它们的工作状态。



题图 1.10

1.13 在题图 1.11 所示电路中,已知  $I=0.5\text{ A}$ ,试计算电路中受控电流源的端电压、受控电压源的电流和电阻  $R$  的值。



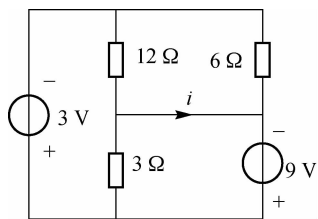
题图 1.11

1.14 由题图 1.12 所示电路,求电流  $i$  及各电压源产生的功率。

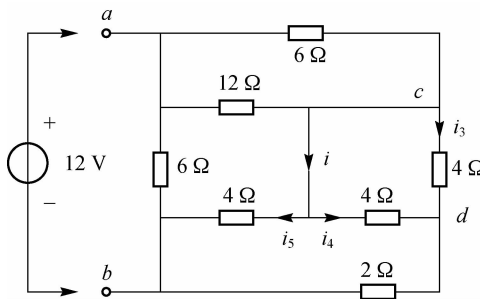
1.15 电路如题图 1.13 所示。

(1) 求  $ab$  端的等效电阻  $R_{ab}$ ;

(2) 当  $ab$  端接 12 V 电压源时,求电流  $i$ 。

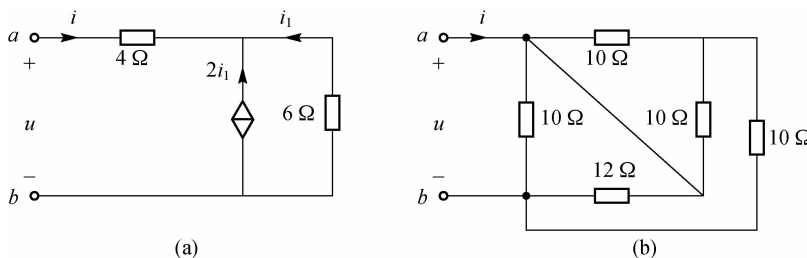


题图 1.12



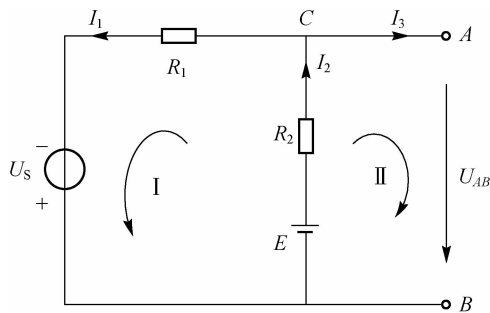
题图 1.13

1.16 由题图 1.14 所示电路,求各电路  $ab$  端的等效电阻  $R_{ab}$ 。



题图 1.14

1.17 已知题图 1.15 所示电路中,  $R_1=10\ \Omega$ ,  $R_2=20\ \Omega$ ,  $E=6\ \text{V}$ ,  $U_S=6\ \text{V}$ , 试求  $I_1$ 、 $I_2$ 、 $I_3$  和  $U_{AB}$ 。



题图 1.15

## 线性电阻电路的分析

在第 1 章中已经介绍了电路的一些基本概念,包括电阻元件、电压源、电流源等元件的伏安特性(VAR),还介绍了基尔霍夫定律的两个定律 KCL、KVL 及表征元件性能的元件约束关系。电路中由线性电阻元件和电源元件组成的电路称为线性电阻电路,本章主要讨论直流电源作用下的线性电阻电路的基本分析方法,但当电源是交流时,这些方法同样适用。

分析线性电阻电路的方法很多,但基本依据是 KCL、KVL 及元件的伏安关系。根据这些基本依据可推导出三种不同的分析电路的方法:等效法、方程法、定理法。本章首先介绍等效变换,然后讨论支路电流法、网孔分析法及节点电位法,最后介绍常用定理,包括叠加定理、齐次定理、戴维南定理和诺顿定理等。

## 2.1 电阻的串联、并联和混联电路

### 2.1.1 电路等效的一般概念

等效是电路分析中极为重要的概念之一,电路的等效变换分析方法是电路分析中常用的一种方法。

在电路分析中可以把一组元件作为一个整体来看待,当这个整体只有两个端钮与外电路连接,且进出这两个端钮的电流相等时,则这个由多个元件构成的整体称为二端网络或单口网络。每一个二端元件,如电阻、电容等,都是二端网络的最简单形式。

图 2.1.1 所示为二端网络的一般符号。流过二端网络的端钮电流、端钮间电压分别称为端口电流  $i$  和端口电压  $u$ ,图中给出的  $u$ 、 $i$  参考方向对二端网络为关联参考方向。 $u$  与  $i$  的关系称为端口伏安关系,也称外部特性,简称外特性。

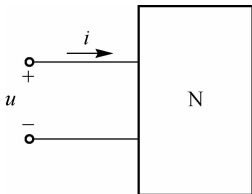


图 2.1.1 二端网络

如果两个二端网络内部结构完全不同,但端钮具有相同的伏安关系,则称这两个二端网络对同一负载(或外电路)而言是等效的,即互为等效网络。相互等效的电路对外电路的影响是完全相同的,也就是说等效是指对外等效。

利用等效电路的概念,在分析电路时,可以用简单的等效电路代替结构较复杂的电路,从而简化电路的分析计算。但值得注意的是,等效电路只是它们对外的作用等效,一般两个电路内部具有不同的结构,工作情况也不相同,因此,等效电路的等效只对外不对内。

### 2.1.2 电阻的串联、并联与混联

在电路分析中,常常需要将电路某一部分的结构进行等效变换,如何导出等效变换条件,是进行等效变换时最重要但一般也是较困难的问题。通常是先根据电路的基本定律列写变换部分的电路方程,经过适当的整理或变形,然后根据等效概念得出等效条件。

最简单也最常见的等效变换就是电阻串并联变换及混联变换,它属于无源一端口网络等效变换。

#### 1. 电阻的串联

两个或两个以上电阻首尾相连,中间没有分支,各电阻流过同一电流的连接方式,称为电阻的串联。识别串联电路的法则:串联电路在两点之间只提供一条电流通路,途中不分流,始终是一条路径。

图 2.1.2(a)所示是三个电阻串联的电路, $a, b$  两端外加电压  $U$ , 设电压、电流参考方向关联。各电阻流过电流  $I$ , 参考方向如图所示。

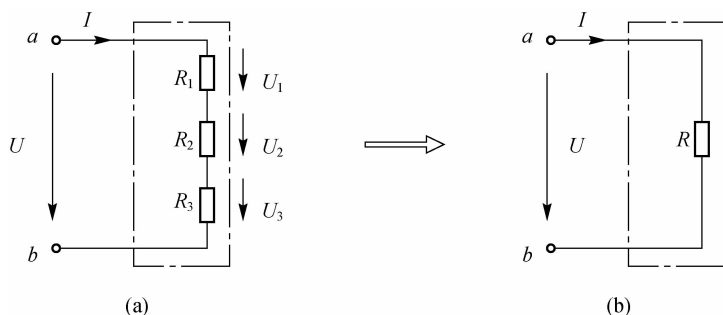


图 2.1.2 串联电阻的等效变换

根据 KVL 和欧姆定律,可得

$$U = U_1 + U_2 + U_3 = IR_1 + IR_2 + IR_3 = I(R_1 + R_2 + R_3) \quad (2.1.1)$$

由图 2.1.2(b)并根据欧姆定律,可得

$$U = IR \quad (2.1.2)$$

两个电路等效的条件是具有完全相同的伏安特性,即式(2.1.1)与式(2.1.2)完全一致,由此可得

$$R = R_1 + R_2 + R_3 \quad (2.1.3)$$

式中, $R$  称为串联的等效电阻。式(2.1.3)表明串联电阻的等效电阻等于各电阻之和。

推广到一般情况, $n$  个电阻串联的等效电阻等于各个电阻之和,即

$$R = \sum_{k=1}^n R_k \quad (2.1.4)$$

电阻串联时的电流相等,各电阻上的电压为

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= IR_1 = \frac{U}{R}R_1 = \frac{R_1}{R}U \\ U_2 &= IR_2 = \frac{U}{R}R_2 = \frac{R_2}{R}U \\ U_3 &= IR_3 = \frac{U}{R}R_3 = \frac{R_3}{R}U \end{aligned} \right\} \quad (2.1.5)$$

写成一般形式为

$$U_k = \frac{R_k}{R}U \quad (2.1.6)$$

式(2.1.6)为串联电阻的分压公式。

由此可见,电阻串联时,各个电阻上的电压与电阻值成正比,即电阻值越大,分得的电压越大。同理,电阻串联时,每个电阻的功率也与电阻值成正比。式(2.1.5)称为电压分配公式。应用此公式时,应注意各电阻上电压的参考方向。

## 2. 电阻的并联

两个或两个以上电阻的首尾两端分别连接在两个节点上,每个电阻两端的电压都相同的连接方式,称为电阻的并联。识别并联电路的法则:如果两点间有多条电流路径,并且这两点间的电压也出现在每个分支上,则这两点间有一个并联电路。

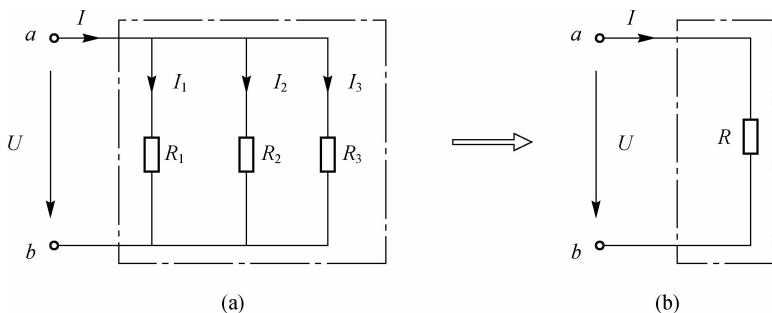


图 2.1.3 并联电阻的等效变换

图 2.1.3(a)所示为三个电阻并联电路, $a$ 、 $b$  两端外加电压  $U$ ,总电流为  $I$ ,各支路电流分别为  $I_1$ 、 $I_2$  和  $I_3$ ,参考方向如图所示。根据 KCL 和欧姆定律,可得

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \frac{U}{R_3} = \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) U \quad (2.1.7)$$

对图 2.1.3(b),根据欧姆定律,有

$$I = \frac{U}{R} \quad (2.1.8)$$

两个电路等效的条件是具有完全相同的伏安特性,即式(2.1.7)与式(2.1.8)完全一致,由此可得

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \quad (2.1.9)$$

或

$$G = G_1 + G_2 + G_3 \quad (2.1.10)$$

式(2.1.9)中的  $R$  称为并联等效电阻;式(2.1.10)中的  $G_1$ 、 $G_2$ 、 $G_3$  为各电阻的电导, $G$

称为并联等效电导。式(2.1.9)说明,几个电阻的并联电阻可以用一个等效电阻来代替,电阻并联电路的等效电阻的倒数等于各个电阻的倒数之和。

推广到一般情况: $n$ 个电阻并联,其等效电阻的倒数等于各个电阻的倒数之和,即 $n$ 个电阻并联的等效电导等于各个电导之和,有

$$\frac{1}{R} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k} \text{ 或 } G = \sum_{k=1}^n G_k \quad (2.1.11)$$

并联电路计算等效电阻的表示式常用 $R=R_1//R_2//R_3\cdots$ 表示。

电阻并联时电压相等,各电阻上的电流为

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \frac{U}{R_1} = \frac{R}{R_1} I = \frac{G_1}{G} I \\ I_2 &= \frac{U}{R_2} = \frac{R}{R_2} I = \frac{G_2}{G} I \\ I_3 &= \frac{U}{R_3} = \frac{R}{R_3} I = \frac{G_3}{G} I \end{aligned} \right\} \quad (2.1.12)$$

写成一般形式为

$$I_n = \frac{R}{R_n} I \quad (2.1.13)$$

式(2.1.13)称为分流公式, $\frac{R}{R_n}$ 称为分流比。可见,电阻并联时,各个电阻上的电流与电阻值成反比,即电阻值越大,分得的电流越小。同理,电阻并联时,每个电阻的功率也与电阻值成反比。这是并联电路性质的重要推论,应用较广。在并联电路的计算中,最常用的是两条支路的分流公式,根据式(2.1.11)可得,两个电阻并联的等效电阻为

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (2.1.14)$$

利用式(2.1.13)得各支路电流为

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \frac{R_2}{R_1 + R_2} I \\ I_2 &= \frac{R_1}{R_1 + R_2} I \end{aligned} \right\} \quad (2.1.15)$$

在应用分流公式时,要注意各支路电流与总电流的参考方向是否一致。

并联电路也有广泛的应用。例如,工厂中的电动机、电炉及各种照明灯具均并联工作;为扩大电流表的量程需通过并联电阻实现等。

### 3. 电阻的混联

既有电阻串联又有电阻并联的电路称为混联电路。混联电路在实际工作和生活中广泛应用,形式多种多样。图2.1.4所示电路就是混联电路。所谓电阻的混联电路,是指串联电阻和并联电阻组合成的二端电阻网络。

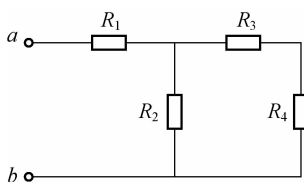


图 2.1.4 电阻的混联

在分析这样的电路时,往往先求出混联电路二端网络的等效电阻,然后利用定律和公式求出其他量。对于较简单的电路可通过观察直接得出。在图 2.1.4 所示的混联电路中,可以直接看出  $R_1 \sim R_4$  的串并联关系,故可求出  $a、b$  两端的等效电阻  $R_{ab}$  为

$$R_{ab} = R_1 + \frac{R_2(R_3 + R_4)}{R_2 + R_3 + R_4} \quad (2.1.16)$$

若电阻串并联关系不能直观地看出,求等效电阻时,关键是判断出哪些电阻串联,哪些电阻并联。可以在不改变元件间连接关系的条件下对电路进行等效变形(扭动变形),短路线可任意压缩或伸长,多个接地点可用短路线相连,等效为一个点。将电路画成比较容易判断串、并联关系的直观图,下面通过例 2.1 来说明。

**例 2.1** 求图 2.1.5(a)所示电路  $a、b$  两端的等效电阻。

**解** 对于这样的电路,可以按如下步骤分析:

- (1)将电路中有分支的连接点依次用字母或数字编号并排序,如图 2.1.5(a)中的  $a、c、c'、d、b$ 。将无电阻导线(短路线)两端的点  $c、c'$  合并为同一点  $c(c')$ 。
- (2)依次把电路元件画在各点之间,得到直观图,如图 2.1.5(b)所示。
- (3)根据直观图,利用串、并联等效电阻公式求出其等效电阻。

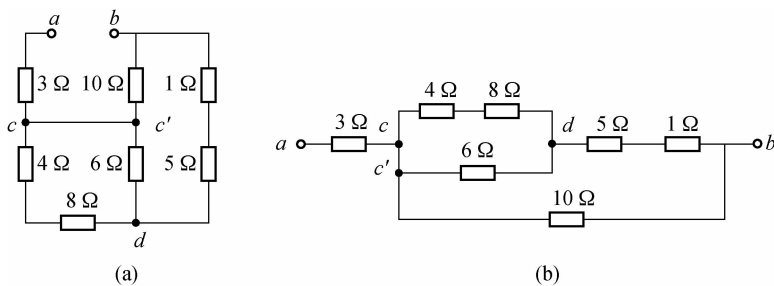


图 2.1.5 例 2.1 图

根据图 2.1.5(b)可直观地看出等效电阻为

$$R_{ab} = 3 + [(4 + 8) // 6 + 5 + 1] // 10 = 8 \Omega$$

## 2.2 电阻的星形联结与三角形联结及其等效变换

上一节讨论了无源二端网络用串、并联方法化简为一个等效电阻。这种不论有多少电阻,结构有多复杂,都能用串、并联方法化简为一个等效电阻的电路,称为简单电阻电路。但是电阻的连接方式,除了串联和并联外,还有一种更复杂的连接——无源三端电路,如图 2.2.1 所示,显然这种电路仅用电阻串并联是无法等效化简的。

在图 2.2.1(a)所示电路中, $R_1、R_2、R_3$  三个电阻的一端连接在一起,另一端分别与外电路连接,这种连接方式为 Y 形联结(星形联结),也称 T 形联结。在图 2.2.1(b)所示电路中, $R_{12}、R_{23}、R_{31}$  三个电阻依次首尾相连,然后三个连接点分别与外电路相连,这种连接方式称为  $\Delta$  形联结(三角形联结),也称为  $\Pi$  形联结。

在分析含有电阻  $\Delta$  形联结或 Y 形联结的电路时,不能用简单的电阻串、并联来等效,常利用电阻  $\Delta$  形联结与电阻 Y 形联结的等效变换来简化电路的计算。



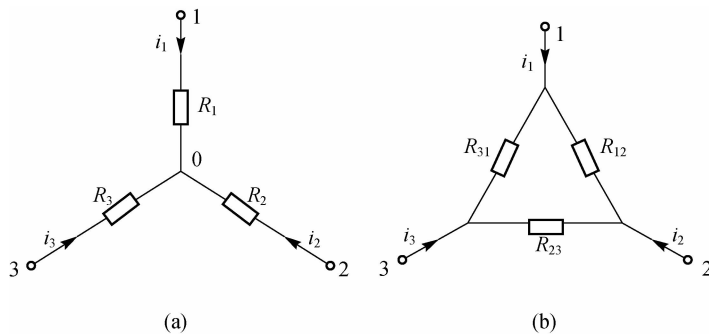


图 2.2.1 电阻的星形联结和三角形联结

### 2.2.1 星形电路等效变换为三角形电路

Y形网络和 $\Delta$ 形网络都有三个端子,称为三端网络。与单口网络等效原理一样,应遵循外部等效原理,即当两种电路对应端钮间的电压相等时,流入对应端钮的电流也必须分别相等,根据上述原则,一种简单的推导方法是将两电路在一个对应端子悬空的同等条件下,分别求出剩余两端子间的电阻,并使两种情况下求得的电阻相等,即在图 2.2.1(a)中,将对应端钮 3 断开,则两种电路中端钮 1、2 间的等效电阻必然相等。

悬空 3 端子时,可得

$$\frac{R_{12}(R_{23} + R_{31})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} = R_1 + R_2 \quad (2.2.1)$$

悬空 2 端子时,可得

$$\frac{R_{31}(R_{12} + R_{23})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} = R_3 + R_1 \quad (2.2.2)$$

悬空 1 端子时,可得

$$\frac{R_{23}(R_{31} + R_{12})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} = R_2 + R_3 \quad (2.2.3)$$

将Y形联结等效变换为 $\Delta$ 形联结,就是把Y形联结电路中的 $R_1$ 、 $R_2$ 、 $R_3$ 作为已知量,把 $\Delta$ 形联结电路中的 $R_{12}$ 、 $R_{23}$ 、 $R_{31}$ 作为待求量,联立式(2.2.1)、式(2.2.2)和式(2.2.3),可得Y形联结等效变换为 $\Delta$ 形联结的公式为

$$\begin{aligned} R_{12} &= \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_3} \\ R_{23} &= \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_1} \\ R_{31} &= \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_2} \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

为了便于记忆,式(2.2.4)可写成如下形式:

$$\Delta\text{形电阻} = \frac{\text{Y形网络中各电阻两两乘积之和}}{\text{Y形网络中对角端电阻}}$$

当Y形联结的三个电阻相等,即 $R_1 = R_2 = R_3 = R_Y$ 时, $R_{12} = R_{23} = R_{31} = 3R_Y$ 。

### 2.2.2 三角形电路等效变换为星形电路

将△形联结等效变换为Y形联结,就是把△形联结电路中的 $R_{12}$ 、 $R_{23}$ 、 $R_{31}$ 作为已知量,把Y形联结电路中的 $R_1$ 、 $R_2$ 、 $R_3$ 作为待求量,联立式(2.2.1)、式(2.2.2)和式(2.2.3),可得△形联结等效变换为Y形联结的公式为

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \\ R_2 &= \frac{R_{23}R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \\ R_3 &= \frac{R_{31}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

为了便于记忆,可将式(2.2.5)写成如下形式:

$$\text{Y形电阻} = \frac{\triangle形网络中相邻两电阻的乘积}{\triangle形网络中的各电阻之和} \quad (2.2.6)$$

当△形联结的三个电阻相等,即 $R_{12}=R_{23}=R_{31}=3R_{\triangle}$ 时, $R_1=R_2=R_3=R_{\triangle}$ 。

**例 2.2** 在图 2.2.2(a)所示电路中,已知 $U_S=220\text{ V}$ , $R_1=40\ \Omega$ , $R_2=36\ \Omega$ , $R_3=50\ \Omega$ , $R_4=55\ \Omega$ , $R_5=10\ \Omega$ ,试求各支路电流。

**解** 将三角形联结的 $R_1$ 、 $R_3$ 、 $R_5$ 等效变换成星形联结的 $R_a$ 、 $R_b$ 、 $R_d$ ,原电路变换成图 2.2.2(b)所示电路。按式(2.2.5)可计算得

$$\begin{aligned} R_a &= \frac{R_1R_3}{R_1 + R_3 + R_5} = \frac{40 \times 50}{40 + 50 + 10} \Omega = 20\ \Omega \\ R_b &= \frac{R_1R_5}{R_1 + R_3 + R_5} = \frac{40 \times 10}{40 + 50 + 10} \Omega = 4\ \Omega \\ R_d &= \frac{R_3R_5}{R_1 + R_3 + R_5} = \frac{50 \times 10}{40 + 50 + 10} \Omega = 5\ \Omega \end{aligned}$$

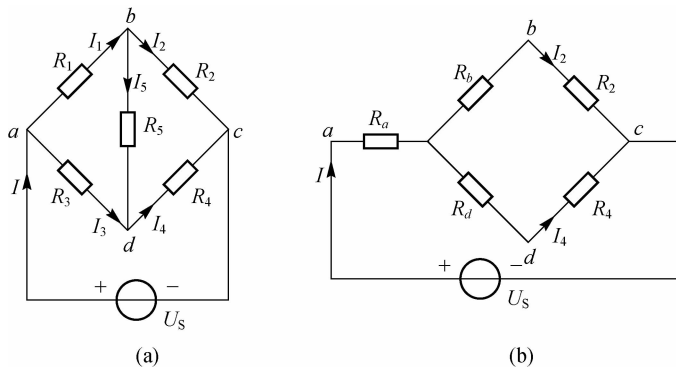


图 2.2.2 例 2.2 图

用电阻的串并联化简图 2.2.2(b)所示电路,并求得

$$I = \frac{U_S}{R_a + \frac{(R_b + R_2)(R_d + R_4)}{R_b + R_2 + R_d + R_4}} = \frac{220}{44} \text{ A} = 5 \text{ A}$$

$$I_2 = 5 \times \frac{5 + 55}{4 + 36 + 5 + 55} \text{ A} = 3 \text{ A}$$

$$I_4 = (5 - 3) \text{ A} = 2 \text{ A}$$

必须注意,图 2.2.2(b)中流过  $R_a$ 、 $R_b$ 、 $R_d$  的电流并不是图 2.2.2(a)中流过  $R_1$ 、 $R_3$ 、 $R_5$  的电流,因为等效变换只是对外部或对端钮等效,对于变换了的每个元件都是不等效的。为了求得  $R_1$ 、 $R_3$ 、 $R_5$  三个电阻中的电流,可在图 2.2.2(b)中求得

$$U_{ab} = IR_a + I_2 R_b = (5 \times 20 + 3 \times 4) \text{ V} = 112 \text{ V}$$

则

$$I_1 = \frac{U_{ab}}{R} = \frac{112}{40} \text{ A} = 2.8 \text{ A}$$

在图 2.2.2(a)中由 KCL 可得

$$I_3 = I - I_1 = (5 - 2.8) \text{ A} = 2.2 \text{ A}$$

$$I_5 = I_1 - I_2 = (2.8 - 3) \text{ A} = -0.2 \text{ A}$$

在用  $\text{Y}-\Delta$  等效变换方法计算电路时,最好先考虑一下如何变换较简捷,以免进行多次变换。

## 2.3 电源的联结及两种实际电源模型的等效变换

### 2.3.1 电源的联结

在工程实践中,有时会遇到电源串并联使用的情况。例如,将多个电源串联使用以提高输出电压;将多个电源并联使用以提高负载的能力等。电路分析时,可对电源的串并联结构进行简化。

如图 2.3.1(a)所示,由三个理想电压源串联组成的二端网络 N,根据电路等效的定义,可以用一个电压源等效代替,如图 2.3.1(b)所示。由 KVL 知该电压源的电压为

$$U_S = U_{S1} + U_{S2} + U_{S3}$$

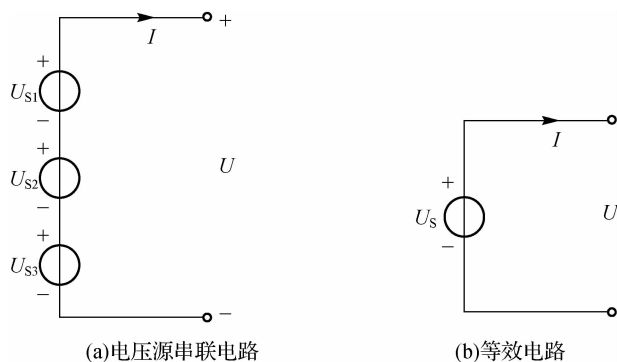


图 2.3.1 电压源的串联

推广到一般情况,多个电压源串联时,其等效电源电压为各个电压源电压的代数和,即

$$U_S = U_{S1} + U_{S2} + \cdots + U_{Sn} = \sum_{k=1}^n U_{Sk} \quad (2.3.1)$$

$U_{Sk}$  与  $U_S$  同向取正,反向取负。

对于电压源的并联,等效时要先确定等效电压源的参考极性,则并联的电压源必须满足大小相等、方向相同这一条件;否则,不允许并联在一起。

如图 2.3.2(a)所示,由三个理想电流源并联组成的二端网络 N,可以用一个电流源等效代替,如图 2.3.2(b)所示。由 KCL 知该电流源的电流为

$$i_S = i_{S1} + i_{S2} + i_{S3}$$

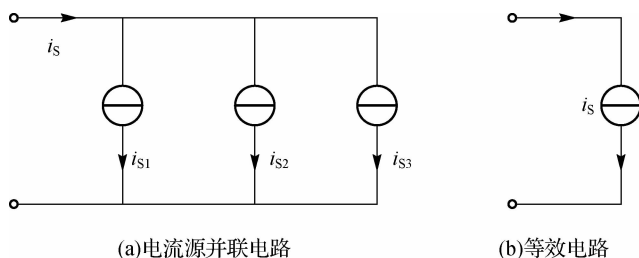


图 2.3.2 电流源的并联及其等效电路

推广到一般情况,多个电流源并联时,其等效电源电流为各个电流源电流的代数和,即

$$i_S = i_{S1} + i_{S2} + \dots + i_{Sn} = \sum_{k=1}^n i_{Sk} \quad (2.3.2)$$

式中,  $i_{Sk}$  与  $i_S$  同向取正,反向取负。

对于电流源的串联,等效时要先确定等效电流源的参考极性,则串联的电流源必须严格满足大小相等、方向相同这一条件,并且其等效电流源的电流就是其中任意一个电流源的电流;否则,不允许串联在一起。

根据电压源的基本特征,电压源  $U_S$  与其他元件并联,由外部特性等效的概念可知,该并联电路可以用一个等效的电压源来代替,端口电压值由电压源 ( $U_S$ ) 决定,端口电流值  $I$  由电压源与外部电路共同决定。例如,图 2.3.3(a)可以等效为图 2.3.3(b),但需注意的是,图 2.3.3(b)中的  $U$  与图 2.3.3(a)中  $U$  的含义完全不同。

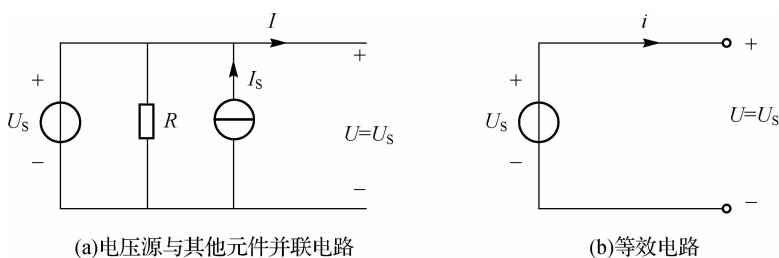


图 2.3.3 电压源与其他元件的并联

同理,根据电流源的基本特征,电流源  $I_S$  与其他元件串联,由外部特性等效的概念可知,该串联电路可以用一个等效的电流源来代替,端口电流值由电流源 ( $I_S$ ) 决定,端口电压值  $U$  由电流源与外部电路共同决定。例如,图 2.3.4(a)可以等效为图 2.3.4(b),但需注意的是,图 2.3.4(b)中的  $I_S$  与图 2.3.4(a)中  $I_S$  的含义完全不同。

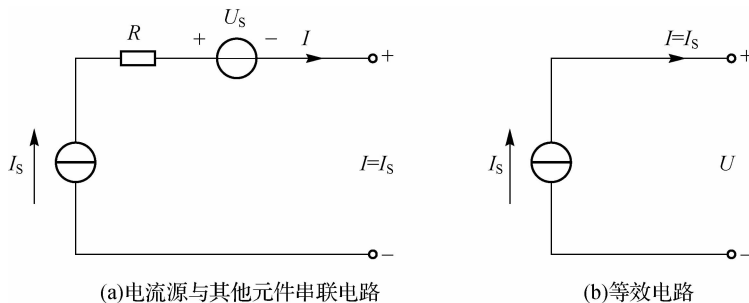


图 2.3.4 电流源与其他元件的串联

例 2.3 将图 2.3.5(a)所示电路简化为最简单形式。

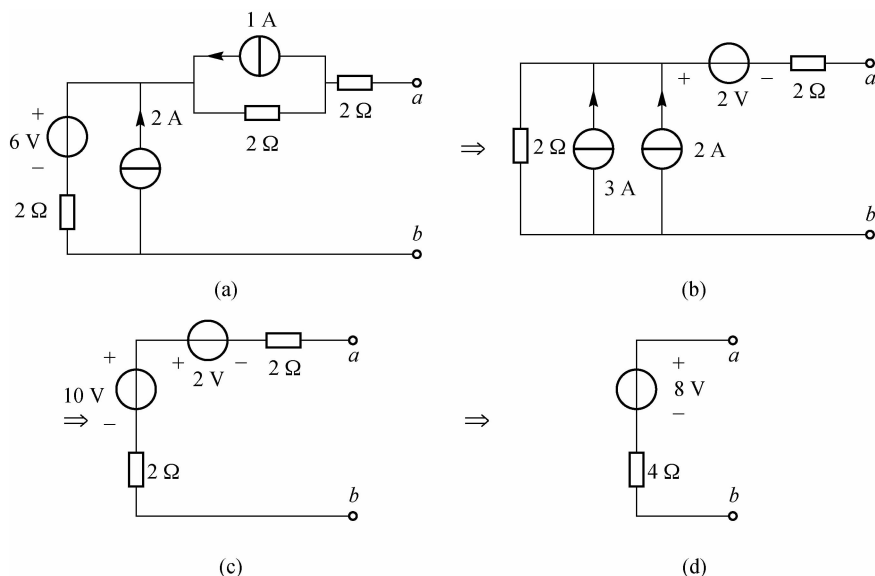


图 2.3.5 例 2.3 电路及解答

**解** 图 2.3.5(a)所示电路可称为有源二端网络,其中含有电阻元件和电源元件。用电源等效变换简化电路,变换过程为(a)—(b)—(c)—(d)。简化过程中多次使用了电源等效变换,在变换过程中要注意电压源极性与电流源方向的关系,图 2.3.5(b)含电流源并联相加,图 2.3.5(c)含电压源串联相减,最后简化为图 2.3.5(d)的最简单支路。

### 2.3.2 两种电源模型的等效变换

前面介绍的理想电压源、理想电流源都是电源的理想电路模型,分别如图 2.3.6(a)、图 2.3.6(b)所示,但在实际使用时,这种理想情况是不存在的,如一个干电池,它总是有内阻的。由于内阻损耗与电流有关,电流越大,损耗越大,实际电压源端电压也就越低。那么,一个实际的电源如何用理想的电路元件表示呢?在某些情况下,实际电源适宜用实际电压源的模型表示,另一些情况下则适宜用实际电流源的模型表示。根据等效概念,对于外电路来说,只要电源的外特性一样,不论用哪一种模型来表示,所起的作用都是一样的。这就是说,实际电源既可以用电压源模型表示,也可以用电流源模型表示。为了方便电路的分析和

计算,常常把两种电源模型进行等效变换。

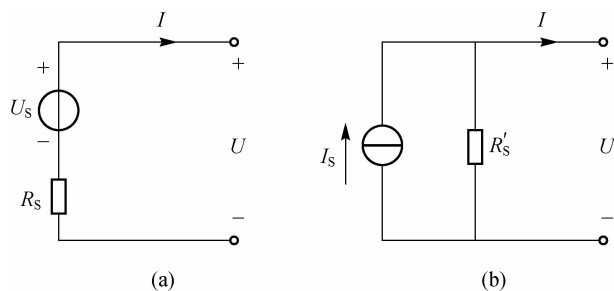


图 2.3.6 两种电源模型

如图 2.3.6(a)所示的实际电压源为理想电压源串联电阻,其伏安特性为

$$U = U_s - R_s I \quad (2.3.3)$$

如图 2.3.6(b)所示的实际电流源为理想电流源并联电阻,其伏安特性为

$$U = R'_s I_s - R'_s I$$

$$I = I_s - \frac{U}{R'_s} \quad (2.3.4)$$

实际电压源与实际电流源的物理意义不同,但从等效角度看,两者端口具有相同的VCR,是可以互换的电路。

比较式(2.3.3)与式(2.3.4),若

$$\left. \begin{aligned} U_s &= R'_s I_s \\ R_s &= R'_s \end{aligned} \right\} \quad (2.3.5)$$

则这两种电源模型的外部电压、电流关系完全相同,因此,对外电路而言,它们是等效的。

式(2.3.5)也可以写成另一种形式,即

$$\left. \begin{aligned} I_s &= \frac{U_s}{R_s} \\ R'_s &= R_s \end{aligned} \right\} \quad (2.3.6)$$

这就是两种电源模型等效的条件。在运用式(2.3.6)进行等效变换时,要注意  $U_s$  和  $I_s$  参考方向的关系:  $I_s$  的参考方向与  $U_s$  从负极指向正极的方向相一致。

另外,两种电源模型相互等效是指其外部等效,其内部并不等效。如同在开路状态下,电压源既不产生功率,其内阻也不消耗功率;而电流源则产生功率,并且全部被内阻所消耗。

理想电压源与理想电流源之间不能等效互换。因为理想电压源的伏安特性为平行于电流轴的直线,而理想电流源的伏安特性为平行于电压轴的直线,二者不可能有相同的伏安特性。

**例 2.4** 试求图 2.3.7(a)、图 2.3.7(c)所示电路的等效变换。

**解** 图 2.3.7(a)所示的实际电压源模型可等效变换为图 2.3.7(b)所示的实际电流源模型,有

$$I_s = \frac{U_s}{R_s} = \frac{6}{3} \text{ A} = 2 \text{ A}, R'_s = R_s = 3 \Omega$$

图 2.3.7(c)所示为一实际电流源模型,可等效变换为图 2.3.7(d)所示的实际电压源模型,有

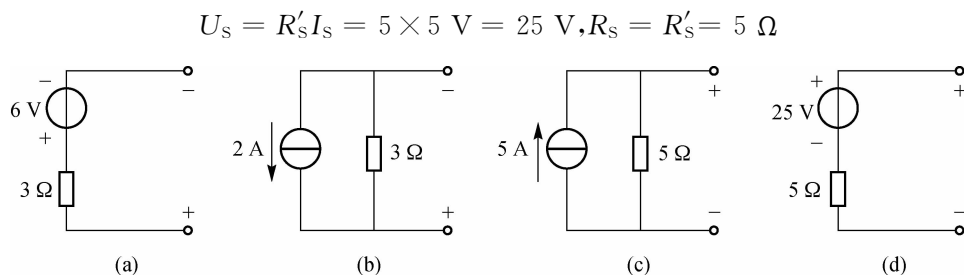


图 2.3.7 例 2.4 图

## 2.4 线性电阻电路的基本分析方法

前一节介绍了几种利用等效变换逐步化简电路,从而进行分析计算的方法。这种分析方法简单有效,但有一定的局限性,适用于具有一定结构形式且比较简单的电路,但是对于复杂电路(如多回路多节点电路)往往不能很方便地化简为单回路电路,也不能用简单的串、并联方法计算其等效电阻。而且在电路的等效变换过程中,由于改变了原来的电路结构,因此不能体现电路分析的普遍规律,所以需要寻求一些行之有效的且更具普遍规律的方法。

分析线性电路的一般方法是网络方程分析法,主要包括支路电流法、网孔电流法和节点电压法等,是通过列出电路方程来求解电路中各部分的电流和电压。

网络方程分析法的思路是:一般不要求改变电路的结构,只要在电路中预先选取合适的电路变量(未知量),如支路电流、支路电压、网孔电流或回路电流和节点电压等;然后根据 KCL、KVL 和 VCR 建立电路方程,方程数应与变量数相同;最后从方程中解出电路的变量,从而求解电路。网络方程分析法在电路分析中更具有一般性,而支路电流法就是其中最基本的方法之一。

### 2.4.1 支路电流法

#### 1. 支路电流法的基本原理

以支路电流为电路待求变量,列出独立的 KCL 和 KVL 方程,联立求解支路电流,再利用支路的伏安关系等求解其他电路物理量的电路分析方法称为支路电流法。

对于一个具有  $b$  条支路的电路,以  $b$  条支路电流为未知量,需要列出  $b$  个独立的电路方程,然后解出各未知的支路电流。下面以图 2.4.1 所示的电路为例,说明支路电流法的求解过程。

在图 2.4.1 所示电路中,支路数  $b=3$ ,节点数  $n=2$ ,支路电流  $I_1$ 、 $I_2$ 、 $I_3$  的参考方向如图所示。首先,根据 KCL 列出节点电流方程。

节点  $a$

$$-I_1 - I_2 + I_3 = 0 \quad (2.4.1)$$

节点  $b$

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0 \quad (2.4.2)$$

显然,式(2.4.1)与式(2.4.2)实际上是相同的,节点  $a$  与节点  $b$  的两个方程中只有 1 个是独立的。具有两个节点的电路只能列出 1 个独立的 KCL 方程。一般来讲,用 KCL 对节点列电流方程时,方程中必须至少含有 1 个新的支路电流(新的未知量)时才是独立的节点

电流方程。

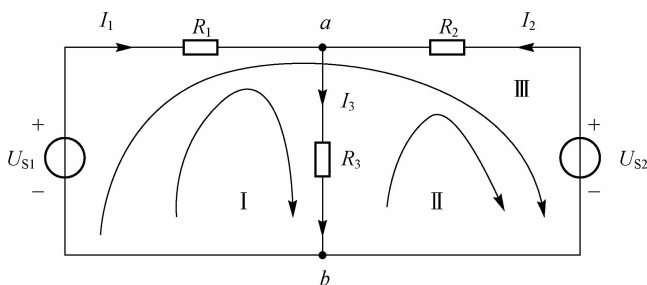


图 2.4.1 支路电流法图例

可以证明,若电路中有  $n$  个节点,则应用 KCL 只能列出  $n-1$  个独立的 KCL 方程。所以, $n$  个节点中,只有  $n-1$  个节点是独立的,称为独立节点。余下的 1 个节点,因为没有新的未知量,所以是非独立的,该节点称为参考节点,参考节点不用列方程,可以任意选取。

其次,对回路列 KVL 方程,选定回路绕行方向(一般选顺时针方向),并标明在电路图中,列出各回路的电压方程。

对于回路 I,可列出

$$I_1 R_1 + I_3 R_3 - U_{S1} = 0 \quad (2.4.3)$$

对于回路 II,可列出

$$-I_2 R_2 + U_{S2} - I_3 R_3 = 0 \quad (2.4.4)$$

对于回路 III,可列出

$$I_1 R_1 - I_2 R_2 + U_{S2} - U_{S1} = 0 \quad (2.4.5)$$

从式(2.4.3)、式(2.4.4)与式(2.4.5)可以看出,这三个方程中的任何一个方程都可以通过其他两个方程相加或相减得到,所以只有两个方程是独立的。这个数目正好与网孔个数相等。

同样可以证明,若平面电路中有  $b$  条支路, $m$  个网孔和  $n$  个节点,则必含有  $m$  个独立的回路,且  $m=b-(n-1)$ 。网孔是最容易选择的独立回路。所谓独立回路,应该至少含有一条为其他已取回路所没有包含的支路,否则该回路为非独立回路。

通常,在用 KVL 列方程时,常取网孔作为独立回路,任一网孔一定包含着至少 1 条新的支路,网孔数一定等于独立回路数。

总之,一个电路含有  $n$  个节点、 $m$  个网孔、 $b$  条支路,应用 KCL 可以列出  $n-1$  个独立节点的电流方程,应用 KVL 可以列出  $m$  个网孔电压方程,而独立方程总数为  $(n-1)+m$ ,恰好等于支路数  $b$ ,所以方程组有唯一解。如图 2.4.1 所示,使用支路电流法求解时必须列写  $b$  个相互独立的方程,联立式(2.4.1)、式(2.4.3)及式(2.4.4),即

$$\begin{cases} -I_1 - I_2 + I_3 = 0 \\ I_1 R_1 + I_3 R_3 - U_{S1} = 0 \\ -I_2 R_2 + U_{S2} - I_3 R_3 = 0 \end{cases}$$

解方程组就可以求得  $I_1$ 、 $I_2$  和  $I_3$ 。

## 2. 支路电流法的解题步骤

(1) 选定支路电流的参考方向并在电路中标明,电流的参考方向可以任意假设。



(2) 根据 KCL 列出节点方程,  $n$  个节点可列  $(n-1)$  个独立方程 ( $\sum I = 0$ )。可设电流流出节点为正, 电流流入节点为负。

(3) 选取  $b-(n-1)$  个独立回路(通常取网孔), 设定各独立回路的绕行方向(如顺时针方向), 根据 KVL 列出独立回路的电压方程 ( $\sum U = 0$ )。

(4) 联立求解上述  $b$  个独立方程, 得出待求的各支路电流, 必要时加以检验。

(5) 确定各支路电流的方向。当支路电流的计算结果为正值时, 其方向和假设方向相同; 当计算结果为负值时, 其方向和假设方向相反。

(6) 如有必要, 由支路电流和各元件的伏安关系再求出其他物理量, 如电压、功率等。

**例 2.5** 求图 2.4.2 所示电路中的各支路电流。

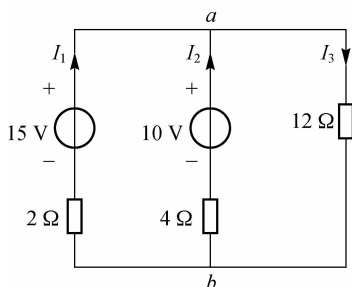


图 2.4.2 例 2.5 图

**解** (1) 由于该电路只有两个节点, 故只能列一个 KCL 独立方程, 选节点  $b$  为参考点, 则对节点  $a$  有

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0$$

(2) 按顺时针方向列出两个网孔的 KVL 独立方程。

$$2I_1 - 4I_2 = 15 - 10$$

$$4I_2 + 12I_3 = 10$$

(3) 联立求解上面三个方程, 得

$$I_1 = 1.5 \text{ A}, I_2 = -0.5 \text{ A}, I_3 = 1 \text{ A}$$

其中,  $I_2$  为负值, 说明假设方向与实际方向相反。

(4) 为验证所求正确与否, 可选择一个未曾用过的回路列 KVL 方程, 把求得的电流值代入方程中, 若方程两边相等, 说明所求值正确。取最大回路, 则有

$$2I_1 + 12I_3 = 15$$

将  $I_1$  和  $I_3$  值代入, 得

$$\text{左边} = 2 \times 1.5 + 12 \times 1 = 3 + 12 = 15 = \text{右边}$$

说明求出的值正确无误。

## 2.4.2 网孔电流法

支路电流法适用于任何形式的电路, 其优点是直观, 缺点是当电路的支路较多时需要求解的方程太多, 计算量大, 不宜手算。因此, 有必要寻求用列较少的方程求解支路电流的方法, 而网孔电流法和节点电压法正是着眼于减少方程个数的一种改进的分析方法。

### 1. 网孔电流与支路电流

下面以图 2.4.3 所示电路为例来说明网孔电流。

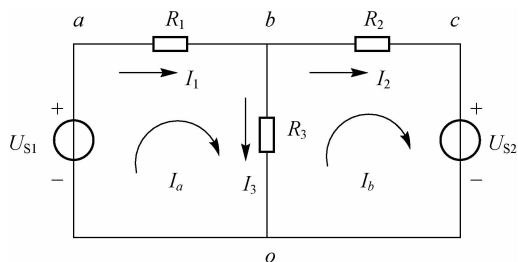


图 2.4.3 网孔电流法举例

网孔电流是假想的沿着电路中网孔边界流动的电流,图 2.4.3 中有三条支路,支路电流为  $I_1$ 、 $I_2$ 、 $I_3$ ,参考方向如图所示;有两个网孔,假设沿网孔边界有流动的电流为  $I_a$ 、 $I_b$ ,参考方向如图所示。从图中可看出,支路  $oab$  中的电流  $I_1$  等于电流  $I_a$ ;支路  $bco$  中的电流  $I_2$  等于电流  $I_b$ ;中间支路  $bo$  中的电流  $I_3$ ,根据对节点  $b$  列 KCL 方程可得  $I_3 = I_1 - I_2 = I_a - I_b$ 。图 2.4.3 中各支路电流可用网孔电流表示为

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= I_a \\ I_2 &= I_b \\ I_3 &= I_a - I_b \end{aligned} \right\} \quad (2.4.6)$$

由此可见,各支路电流可以用沿网孔流动的电流表示,即某一条支路电流等于通过该支路的各网孔电流的代数和。网孔电流数目等于电路的网孔数,比支路电流数大为减少。

### 2. 网孔电流法的基本原理

网孔电流法是以网孔电流为未知量,根据 KVL 来列写电路中网孔电流的回路电压方程。网孔电流法的独立方程数等于网孔数,即独立回路数为  $b - (n - 1)$ 。求出网孔电流后,所有支路的电流及元件两端的电压便很容易求出。

以图 2.4.3 为例,左边网孔为网孔 1,右边网孔为网孔 2,假设  $I_a$ 、 $I_b$  为网孔电流,参考方向如图所示,选取网孔绕行方向与网孔电流参考方向一致,根据 KVL 可得

$$\left. \begin{aligned} I_1 R_1 + I_3 R_3 - U_{S1} &= 0 \\ I_2 R_2 - I_3 R_3 + U_{S2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.4.7)$$

将式(2.4.7)中的支路电流用网孔电流代替,可得

$$\left. \begin{aligned} R_1 I_a + R_3 (I_a - I_b) - U_{S1} &= 0 \\ R_2 I_b - R_3 (I_a - I_b) + U_{S2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.4.8)$$

整理后可得

$$\left. \begin{aligned} (R_1 + R_3) I_a - R_3 I_b &= U_{S1} \\ -R_3 I_a + (R_2 + R_3) I_b &= -U_{S2} \end{aligned} \right\} \quad (2.4.9)$$

这就是以网孔电流为未知量列出的 KVL 方程,称为网孔方程。

将式(2.4.9)写成一般形式为

$$\left. \begin{aligned} R_{11} I_a + R_{12} I_b &= U_{S11} \\ R_{21} I_a + R_{22} I_b &= U_{S22} \end{aligned} \right\} \quad (2.4.10)$$

式(2.4.10)中的  $R_{11}$  和  $R_{22}$  分别代表两个网孔的自电阻, 它们为各自网孔中所有电阻之和, 恒为正值, 即  $R_{11} = R_1 + R_2$ ,  $R_{22} = R_2 + R_3$ ; 而  $R_{12}$  和  $R_{21}$  为相邻两个网孔的共有电阻, 称为互电阻, 即  $R_{12} = R_{21} = -R_2$ , 可正可负。当相邻两网孔电流通过公共支路时的方向一致, 互电阻为正值; 不一致时, 互电阻为负值。在选定网孔电流都是顺时针或者都是逆时针方向的情况下, 互电阻都是负的。  $U_{S11} = U_{S1}$ ,  $U_{S22} = -U_{S2}$  分别表示网孔 1、2 中所有电压源电压的代数和。各电压源前面符号的确定原则是: 当电压源电压的参考方向与网孔电流的参考方向一致时, 电压源电压取负号, 反之取正号。

### 3. 网孔电流法的解题步骤

综合前面的分析, 将网孔电流分析法的一般分析步骤概括如下。

(1) 选择网孔回路为独立回路, 标出各网孔标号、网孔电流及网孔电流参考方向。通常取同为顺时针(或同为逆时针)。

(2) 列写出用网孔电流表示的各网孔的 KVL 方程。

(3) 联立求解用网孔电流表示的 KVL 方程, 求出需要的网孔电流。

(4) 由网孔电流求取需要的支路电流, 根据支路电流求得支路电压, 并进一步求出支路功率, 进而求得其他需要的电路变量。

在网孔分析法中, 由于省略 KCL 方程, 因而与支路分析法相比计算有所简化。

**例 2.6** 电路如图 2.4.4 所示, 应用网孔分析法求各支路电流。

**解** 指定网孔电流  $I_1$ 、 $I_2$ 、 $I_3$  的参考方向, 如图 2.4.4 所示, 分别列出网孔方程

$$\left. \begin{aligned} (6 + 12 + 2)I_1 - 2I_2 - 12I_3 &= 50 - 12 \\ -2I_1 + (2 + 4 + 4)I_2 - 4I_3 &= 12 - 36 \\ -12I_1 - 4I_2 + (6 + 4 + 12)I_3 &= -24 + 36 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} 20I_1 - 2I_2 - 12I_3 &= 38 \\ -2I_1 + 10I_2 - 4I_3 &= -24 \\ -12I_1 - 4I_2 + 22I_3 &= 12 \end{aligned} \right\}$$

化简为

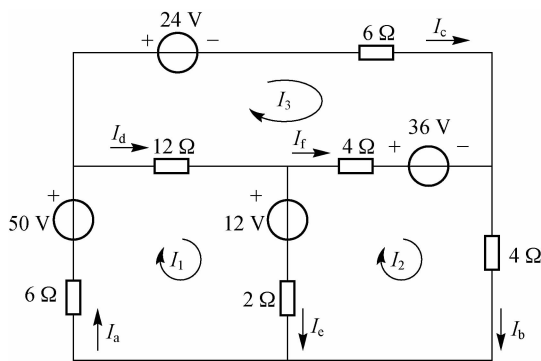


图 2.4.4 例 2.6 图

解得

$$I_1 = 3 \text{ A}, I_2 = -1 \text{ A}, I_3 = 2 \text{ A}$$

各支路电流为

$$I_a = I_1 = 3 \text{ A}, I_b = I_2 = -1 \text{ A}, I_c = I_3 = 2 \text{ A}$$

$$I_d = I_1 - I_3 = 1 \text{ A}, I_e = I_1 - I_2 = 4 \text{ A}, I_f = I_2 - I_3 = -3 \text{ A}$$

### 2.4.3 节点电压法

节点电压法也称为节点电位法。与网孔分析法相似,节点分析法也能减少方程的数目。它是以独立节点对参考节点的电压(简称节点电压)为电路的求解对象,利用 KCL 和欧姆定律列出  $n-1$  个以独立节点电压为未知量的方程,然后联立求解,得出各节点电压,再进一步求出其他各待求量的方法。节点电压法的方程数等于独立节点数。

#### 1. 节点电压

在电路中任意选一节点为参考节点,电路其余节点称为独立节点。独立节点与参考节点之间的电压称为节点电压,节点电压的参考方向总是假设为由独立节点指向参考节点。例如,在图 2.4.5 所示电路中,如果选择节点 0 作为参考节点,则节点 1、2 为独立节点,它们对节点 0 之间的电压就称为节点电压  $U_1$  和  $U_2$ ,其中  $U_1 = U_{10}, U_2 = U_{20}$ ,其参考方向由独立节点 1、2 指向参考节点 0。求得各独立节点的电压后,利用支路电流和相应的节点电压的线性关系,各支路的电流也就很容易求得,即  $I_1 = \frac{U_1}{R_1}, I_2 = \frac{U_{12}}{R_2} = \frac{U_1 - U_2}{R_2}, I_3 = \frac{U_2}{R_3}$ 。

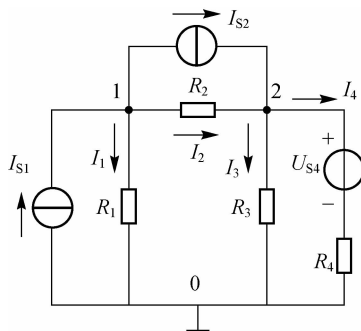


图 2.4.5 节点电位法举例

#### 2. 节点电压法的基本原理

节点电压法是以节点电压作为电路的未知量,然后根据 KCL 来列写电路中各独立节点电流方程的分析方法。节点上各电阻支路的电流大小是以节点电压的形式来表示的。节点电压法的独立方程数等于独立节点数,即  $n-1$ 。求出各独立节点的节点电压后,就可求得全部支路电压,从而进一步解出各支路电流。求出各独立节点的节点电压后,所有支路的电流大小很容易求出。

用节点电压法列写 KCL 方程原则上与用支路电流法列写 KVL 方程一样,但是这时应该用节点电压来表示各电阻支路中的电流。但要注意的是,节点电压分为两种:一种是接在独立节点与参考点之间,支路电压就是节点电压;另一种是电阻支路接在两个独立节点之间,列写方程时应该把这两个独立节点电压都计算进去,即支路电压是两个节点电压之差。

图 2.4.5 所示电路中有三个节点 0、1、2,选节点 0 为参考点,则节点 1、2 的电压  $U_1$ 、 $U_2$  为未知量。各支路电流的参考方向如图所示,根据 KCL 方程可得

$$\text{节点 1:} \quad I_{S1} - I_1 - I_2 - I_{S2} = 0 \quad (2.4.11)$$

$$\text{节点 2:} \quad I_2 + I_{S2} - I_3 - I_4 = 0 \quad (2.4.12)$$

根据欧姆定律和不闭合回路基尔霍夫电压定律可得

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \frac{U_1}{R_1} = G_1 U \\ I_2 &= \frac{U_{12}}{R_2} = \frac{U_1 - U_2}{R_2} = G_2 (U_1 - U_2) \\ I_3 &= \frac{U_2}{R_3} = G_3 U_2 \\ I_4 &= \frac{U_2 - U_{S4}}{R_4} = \frac{U_2}{R_4} - \frac{U_{S4}}{R_4} = G_4 U_2 - G_4 U_{S4} \end{aligned} \right\} \quad (2.4.13)$$

将式(2.4.13)代入式(2.4.11)、式(2.4.12),整理后得

$$\left. \begin{aligned} (G_1 + G_2)U_1 - G_2 U_2 &= I_{S1} - I_{S2} \\ -G_2 U_1 + (G_2 + G_3 + G_4)U_2 &= I_{S2} + G_4 U_{S4} \end{aligned} \right\} \quad (2.4.14)$$

这就是以节点电压  $U_1$ 、 $U_2$  为未知量的节点电压方程。

将式(2.4.14)写成一般形式为

$$\left. \begin{aligned} G_{11}U_1 + G_{12}U_2 &= I_{S11} \\ G_{21}U_1 + G_{22}U_2 &= I_{S22} \end{aligned} \right\} \quad (2.4.15)$$

式(2.4.15)称为具有两个独立节点电路的节点方程的一般形式。其中,  $G_{11} = G_1 + G_2$  表示节点 1 的自电导,其值等于直接连接在节点 1 的各条支路的电导之和;  $G_{22} = G_2 + G_3 + G_4$  表示节点 2 的自电导,其值等于直接连接在节点 2 的各条支路的电导之和。自电导恒为正值,这是因为假设节点电压的参考方向总是由独立节点指向参考节点,则各节点电压在自电导中引起的电流总是流出该节点的。  $G_{12} = G_{21} = -G_2$  表示节点 1、2 间的互电导,其值等于连接在节点 1 和节点 2 之间的各支路电导之和,其符号总为负。互电导恒为负值,原因是另一节点电压通过互电导产生的电流总是流入本节点的。

式(2.4.15)中,  $I_{S11} = I_{S1} - I_{S2}$  表示流过节点 1 的所有电流源电流的代数和,  $I_{S22} = I_{S2} + G_4 U_{S4}$  表示流过节点 2 的所有电流源电流的代数和。当电流源电流流入节点时,前面取正号;流出节点时,前面取负号。若是理想电流源支路有串联电阻,在列写节点电压方程时,该电阻应去除(短路)。若电路中存在电压源与电阻串联的支路,则将其等效变换为电流源与电阻的并联。

### 3. 节点电压法的基本步骤

应用节点电压法求解电路的步骤可归纳如下。

(1) 任选电路中某一节点为参考节点,用接地符号表示。其余独立节点与参考节点间的电压就是节点电压,其参考方向是由独立节点指向参考节点。

(2) 按一般公式,列出  $n-1$  个独立节点的节点方程。自电导恒为正,互电导恒为负。

(3) 联立求解节点方程,求出各节点电压。

(4) 指定支路电压和支路电流的参考方向,由节点电压计算各支路电压和支路电流。

(5) 若电路中存在电压源与电阻串联的支路,则将其等效变换为电流源与电阻的并联。

**例 2.7** 用节点电压法求如图 2.4.6 所示电路的各支路电流。

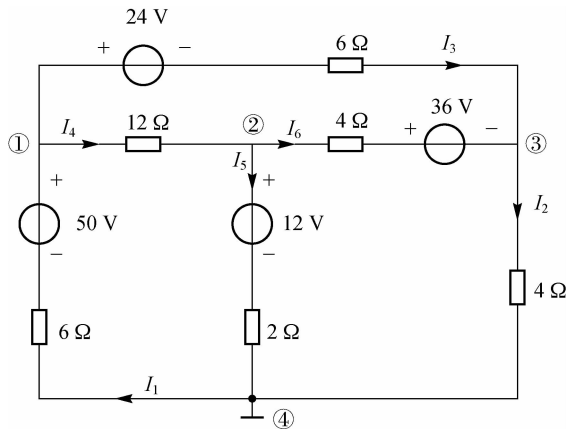


图 2.4.6 例 2.7 图

解 该电路共有 4 个节点,选节点④为参考节点,设独立节点①、②、③的节点电压分别为  $U_1$ 、 $U_2$ 、 $U_3$ 。

3 个独立节点的节点方程为

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}\right)U_1 - \frac{1}{12}U_2 - \frac{1}{6}U_3 &= \frac{50}{6} + \frac{24}{6} \\ -\frac{1}{12}U_1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12}\right)U_2 - \frac{1}{4}U_3 &= \frac{12}{2} + \frac{36}{4} \\ -\frac{1}{6}U_1 - \frac{1}{4}U_2 + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right)U_3 &= -\frac{24}{6} - \frac{36}{4} \end{aligned}$$

整理可得

$$\begin{aligned} 5U_1 - U_2 - 2U_3 &= 148 \\ -U_1 + 10U_2 - 3U_3 &= 180 \\ -2U_1 - 3U_2 + 8U_3 &= -156 \end{aligned}$$

解得各节点电压为

$$U_1 = 32 \text{ V}, U_2 = 20 \text{ V}, U_3 = -4 \text{ V}$$

求得各支路电流为

$$I_1 = 3 \text{ A}, I_2 = -1 \text{ A}, I_3 = 2 \text{ A}, I_4 = 1 \text{ A}, I_5 = 4 \text{ A}, I_6 = -3 \text{ A}$$

## 2.5 电路的基本定理

前面几节讨论了线性电路分析的基本方法——支路电流法、网孔电流法和节点电压法。为了能更直接、简便地分析电路,减少烦琐的计算过程,除了这些方法之外,还有一些分析线性电路的常用定理,能更直接、更简便地分析电路。其中,除了已经介绍的基尔霍夫定律外,还包括叠加定理、齐次定理、戴维南定理和诺顿定理等。

### 2.5.1 叠加定理

叠加性是线性电路的基本性质,叠加定理是反映线性电路特性的重要定理,是线性网络电路分析中普遍适用的重要原理,在电路理论上占有重要的地位。叠加定理可表述为:在线

性电路中,当有两个或两个以上的独立源作用时,电路中任意支路的电压(或电流)的响应,等于各个独立源单独作用时在该支路中产生的电压(或电流)响应的代数和。现以图 2.5.1(a)所示电路为例来导出叠加定理的定义和应用。图中有两个独立电源,现求  $I$ , 电流参考方向如图 2.5.1 所示。

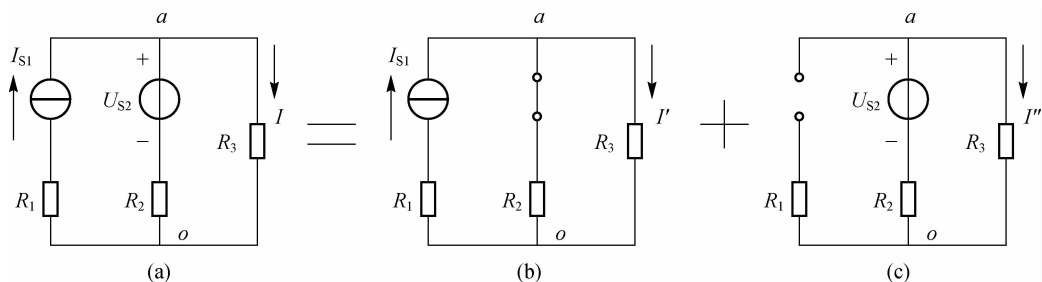


图 2.5.1 叠加定理举例

对图 2.5.1(a),选取节点  $o$  为参考点,根据弥尔曼定理可求得节点  $a$  的电位为

$$V_a = \frac{I_{S1} + \frac{U_{S2}}{R_2}}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} \quad (2.5.1)$$

整理可得

$$V_a = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} I_{S1} + \frac{R_3}{R_2 + R_3} U_{S2} \quad (2.5.2)$$

根据欧姆定理可得

$$I = \frac{V_a}{R_3} = \frac{R_2}{R_2 + R_3} I_{S1} + \frac{1}{R_2 + R_3} U_{S2} \quad (2.5.3)$$

从式(2.5.3)可看出,通过  $R_3$  的电流由两部分组成。第一部分仅与  $I_{S1}$ 、 $R_2$ 、 $R_3$  有关,可看成只有  $I_{S1}$  单独作用时,通过电阻  $R_3$  的电流,此时  $U_{S2}$  不起作用,即  $U_{S2} = 0$ ,用短路线代替,如图 2.5.1(b)所示。由图 2.5.1(b)可知,此时流过  $R_3$  的电流为

$$I' = \frac{R_2}{R_2 + R_3} I_{S1} \quad (2.5.4)$$

正好与式(2.5.3)中第一项相符。第二部分仅与  $U_{S2}$ 、 $R_2$ 、 $R_3$  有关,可看成只有  $U_{S2}$  单独作用时,通过电阻  $R_3$  的电流,此时  $I_{S1}$  不作用,即  $I_{S1} = 0$ ,用开路代替,如图 2.5.1(c)所示。由图 2.5.1(c)可知,此时流过  $R_3$  的电流为

$$I'' = \frac{1}{R_2 + R_3} U_{S2} \quad (2.5.5)$$

正好与式(2.5.3)第二项相符。从上述分析可得: $I_{S1}$  与  $U_{S2}$  分别单独作用在  $R_3$  上产生的电流之和等于共同作用在  $R_3$  上产生的电流,这一特性被称为叠加定理。

叠加定理在线性电路的分析中起着重要作用,它是分析线性电路的基础。线性电路的许多定理可以从叠加定理导出。在运用叠加定理时,也可以把电路中所有的电压源和电流源分成几组,按组计算电流和电压后再叠加。

应用叠加定理时应注意以下几点。

(1)应用叠加定理时,应保持电路结构及元件参数不变。当一个独立电源单独作用时,

其他独立电源应为零,即独立电压源用短路代替,独立电流源用开路代替。

(2)叠加定理只适用于线性电路(由线性元件组成的电路),而且只适用于电压、电流的计算,不适用于功率的计算。

(3)叠加时必须注意各个响应分量是代数和,因此要考虑总响应与各分响应的参考方向或参考极性。当分响应的参考方向或参考极性与总响应的参考方向或参考极性一致时,叠加时取“+”,反之取“-”。

(4)叠加定理被用于含有受控源的电路时,当独立源单独作用时,所有的受控源均应保留,因为受控源不是激励,且具有电阻性。

**例 2.8** 如图 2.5.2(a)所示电路,试用叠加定理求电压源中的电流和电流源两端的电压。

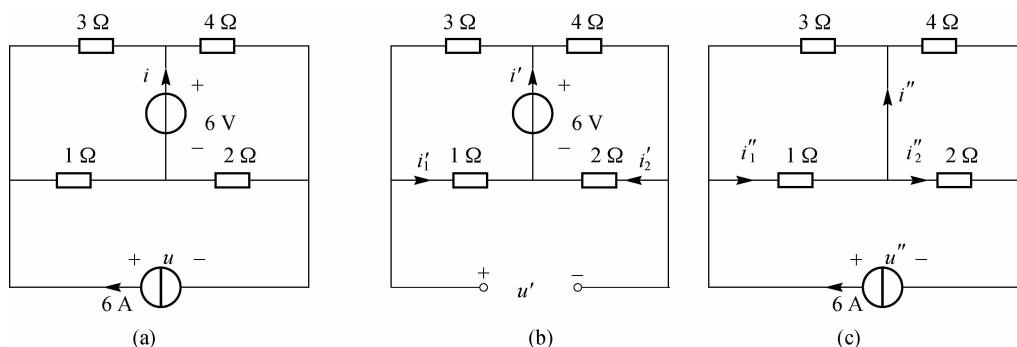


图 2.5.2 例 2.8 图

**解** 求解此类电路,以应用叠加定理最为简便。

当 6 V 电压源单独作用时,6 A 电流源应开路,如图 2.5.2(b)所示,故得

$$i'_1 = \frac{6}{3+1} \text{ A} = 1.5 \text{ A}$$

$$i'_2 = \frac{6}{4+2} \text{ A} = 1 \text{ A}$$

故

$$i' = i'_1 + i'_2 = (1.5 + 1) \text{ A} = 2.5 \text{ A}$$

$$u' = i'_1 - 2i'_2 = (1.5 - 2 \times 1) \text{ V} = -0.5 \text{ V}$$

当 6 A 电流源单独作用时,6 V 电压源应短路,如图 2.5.2(c)所示,故得

$$i''_1 = \frac{3}{3+1} \times 6 \text{ A} = 4.5 \text{ A}$$

$$i''_2 = \frac{4}{4+2} \times 6 \text{ A} = 4 \text{ A}$$

故

$$i'' = i''_1 - i''_2 = (4.5 - 4) \text{ A} = 0.5 \text{ A}$$

$$u'' = i''_1 + 2i''_2 = (4.5 + 2 \times 4) \text{ V} = 12.5 \text{ V}$$

故根据叠加定理得

$$i = i' + i'' = (2.5 + 0.5) \text{ A} = 3 \text{ A}$$

$$u = u' + u'' = (-0.5 + 12.5) \text{ V} = 12 \text{ V}$$

**例 2.9** 用叠加定理求图 2.5.3(a)所示电路中的  $I_1$  和  $U$ 。

**解** 因图 2.5.3(a)中独立源数目较多,每一独立源单独作用一次,需要做 4 次计算,比



较麻烦,故可采用对独立源“分组”作用的办法求解。

两个电压源同时作用时,可将两电流源开路,如图 2.5.3(b)所示。依图 2.5.3(b)有

$$I' = \frac{12+6}{3+6} \text{ A} = 2 \text{ A}$$

$$U' = I'_1 \times 6 - 6 = (2 \times 6 - 6) \text{ V} = 6 \text{ V}$$

两个电流源同时作用时,可将两电压源短路,如图 2.5.3(c)所示。由于 2 A 电流源单独作用时,3 A 电流源开路,使得中间回路断开,故  $I''_1$  仅由 3 A 电流源决定,所以

$$I''_1 = \frac{3 \times 3}{3+6} \text{ A} = 1 \text{ A}$$

$$U'' = 6I''_1 + 2 \times (3+2) = 16 \text{ V}$$

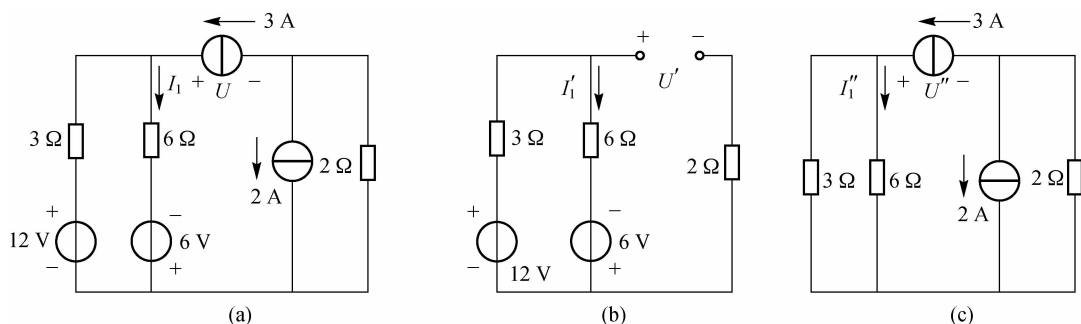


图 2.5.3 叠加定理

所以电源共同作用时的电流与电压分别为

$$I_1 = I'_1 + I''_1 = (2 + 1) \text{ A} = 3 \text{ A}, U = U' + U'' = (6 + 16) \text{ V} = 22 \text{ V}$$

## 2.5.2 齐次定理

线性电路的另一个重要特性是齐次性(又称比例性或均匀性),将该性质总结为线性电路中另一个重要的定理——齐次定理。

齐次定理可表述为:在线性电路中,当所有电压源和电流源都增大或缩小  $K$  倍时( $K$  为实常数),支路电流和电压也将同样增大或缩小  $K$  倍。这个定理可以由叠加定理推导得出。需要注意的是,必须是电路中全部电压源和电流源同时增大或缩小  $K$  倍,否则将导致错误的结果。对图 2.5.1(a)所示电路,已经求得电流  $I$  为

$$I = \frac{R_2}{R_2 + R_3} I_{S1} + \frac{1}{R_2 + R_3} U_{S2} \quad (2.5.6)$$

对于线性电路,设  $K_1 = \frac{R_2}{R_2 + R_3}$ ,  $K_2 = \frac{1}{R_2 + R_3}$ , 则式(2.5.6)可表示为

$$I = K_1 I_{S1} + K_2 U_{S2} \quad (2.5.7)$$

式中, $K_1$ 、 $K_2$  为比例常数。若  $I_{S1}$  和  $U_{S2}$  按同一比例变化, $I$  也按相同比例变化。

**例 2.10** 如图 2.5.4(a)所示电路,试用叠加定理求电流  $i$ ,再用齐次定理求图 2.5.4(b)所示电路中的电流  $i'$ 。

**解** 用叠加定理可求得图 2.5.4(a)所示电路中的电流  $i = 2 \text{ A}$ 。又因为图 2.5.4(b)所示电路中的两个独立源都扩大了  $(-2)$  倍,即  $k = -2$ ,故

$$i' = ki = -2i = -2 \times 2 \text{ A} = -4 \text{ A}$$

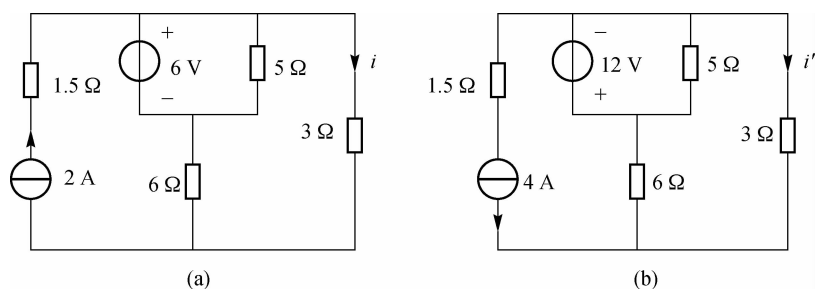


图 2.5.4 例 2.10 图

**特例:**若线性电阻电路中只有一个独立源作用,则根据齐次定理,电路中的每一个响应都与产生该响应的激励成正比。

**例 2.11** 如图 2.5.5 所示电路,求  $i_1$ 、 $i_2$ 、 $u_1$  和  $u_2$ 。

**解** 在图 2.5.5(a)中,有

$$i_1 = \frac{6}{\frac{6 \times 3}{6 + 3} + 1} \text{ A} = \frac{6}{3} \text{ A} = 2 \text{ A}$$

$$u_1 = \left( -\frac{3}{3 + 6} \times 2 \times 6 \right) \text{ V} = -4 \text{ V}$$

在图 2.5.5(b)中,由于电压源电压为图 2.5.5(a)中电压源电压的  $(-2)$  倍,即  $k = -2$ ,故有

$$i_2 = ki_1 = -2 \times 2 \text{ A} = -4 \text{ A}$$

$$u_2 = ku_1 = -2 \times (-4) \text{ V} = 8 \text{ V}$$

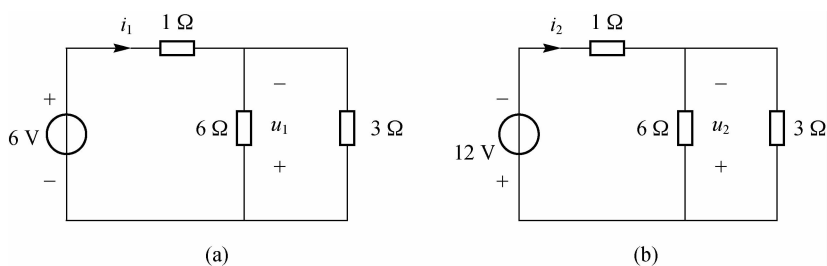


图 2.5.5 例 2.11 图

需要指出的是,叠加定理与齐次定理是线性电路中两个互相独立的定理,不能用叠加定理代替齐次定理,也不能片面地认为齐次定理是叠加定理的特例。同时满足叠加定理与齐次定理的电路称为线性电路。

### 2.5.3 戴维南定理与诺顿定理

在线性电路分析中,往往只需计算某一支路的电压、电流、功率等物理量。但是在实际问题中,电路中有一条特殊的支路(通常称为负载支路)的参数是变化的,而其他部分则固定不变。例如,电源插座上可以接不同的负载,而插座内部电路相对固定;音频功率放大器外

部的负载(扩音器)也是可以变化的,而功率放大器内部则相对固定。对每一个变化的电路元件都要计算一次,计算量较大。为了避免对固定部分的重复计算,可以用戴维南定理和诺顿定理对固定不变的部分进行等效简化,使电路的分析简化。

### 1. 二端网络

二端网络又称单口网络,是指一个电路对外由两个引出端钮而构成一个端口的网络,如图 2.5.6 所示。在线性电路中,凡是由独立电源和电阻组成的二端网络就称为有源二端网络,用字母  $N_s$  表示;凡是内部不含独立电源而只含有电阻的二端网络就称为无源二端网络,用字母  $N_o$  表示。

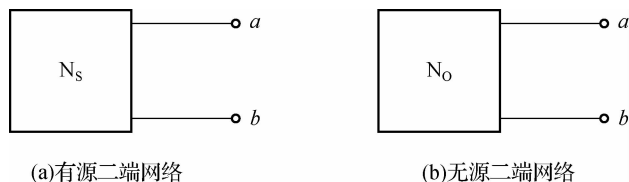


图 2.5.6 二端网络的表示符号

一个有源二端网络,不论它的简繁程度如何,当与外电路相连时,仅相当于一个电源向外电路提供电能,它会像电源一样向外电路提供电能,因此,这个有源二端网络可以等效变换成一个电源。一个电源可以用两种电路模型表示:一种是理想电压源和电阻串联的实际电压源模型,另一种是理想电流源和电阻并联的实际电流源模型。这两种等效模型得出戴维南定理与诺顿定理,戴维南定理和诺顿定理统称等效电源定理,也称等效发电机定理。

### 2. 戴维南定理

戴维南定理指出:对外电路而言,任何一个线性有源二端网络  $N_s$ ,都可以等效为一个电压源和一个电阻的串联组合。其中,电压源的电压等于线性有源二端网络  $N_s$  端口的开路电压  $U_{oc}$ ;串联电阻的阻值等于将有源二端网络  $N_s$  中所有独立源都置零后,所得无源网络  $N_o$  的等效电阻  $R_{eq}$ 。

将含源一端口网络  $N_s$  开路,如图 2.5.7(a)所示,图中  $U_{oc}$  为它的开路电压,图 2.5.7(b)是将图 2.5.7(a)内部所有独立源置零后的无源一端口网络  $N_o$  及等效电阻  $R_{eq}$ 。根据戴维南定理,对于端口  $ab$  而言,带外电路或负载电路中的  $N_s$  可以等效为图 2.5.7(c)所示的形式,即  $N_s$  等效成电压源  $U_{oc}$  和电阻  $R_{eq}$  的串联。电压源  $U_{oc}$  和电阻  $R_{eq}$  的串联电路称为  $N_s$  的戴维南等效电路,其中  $R_{eq}$  也称为戴维南等效电阻。根据等效的概念,等效前后一端口  $a, b$  之间的电压  $U$  和流过端点  $a, b$  上的电流  $I$  不变,即对外电路或负载电路来说,等效前后的电压、电流保持不变。可见,这种等效为对外等效。

戴维南定理可用替代定理和叠加定理证明。在图 2.5.8(a)所示的电路中,设电流  $I$  已知,根据替代定理,用  $I_s = I$  的电流源替代图中的外电路或负载电路,替代后的电路如图 2.5.8(b)所示,然后对图 2.5.8(b)应用叠加定理。设  $I_s$  不作用(断开),只有  $N_s$  中全部的独立源作用,所得电路如图 2.5.8(c)所示;设  $N_s$  中全部的独立源不作用,只有  $I_s$  单独作用,所得电路如图 2.5.8(d)所示。根据叠加定理,图 2.5.8(a)中的  $I$  和  $U$  分别为

$$I = I^{(1)} + I^{(2)} = 0 + I_S = I_S \quad (2.5.8)$$

$$U = U^{(1)} + U^{(2)} = U_{OC} - R_{eq}I \quad (2.5.9)$$

式(2.5.8)中的 $U_{OC}$ 为 $N_S$ 的开路电压, $R_{eq}$ 为 $N_S$ 的无源端口等效电阻。同时由图 2.5.8(c)也可以得出式(2.5.9),故戴维南定理得证。

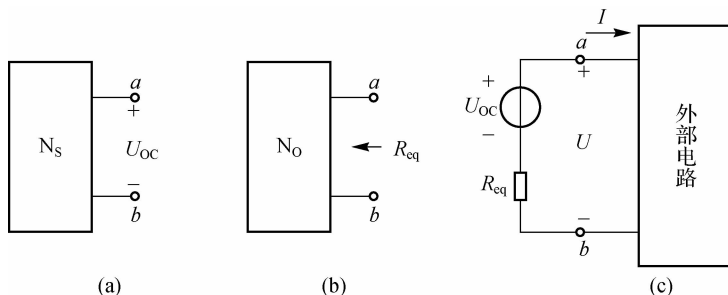


图 2.5.7 戴维南定理图解

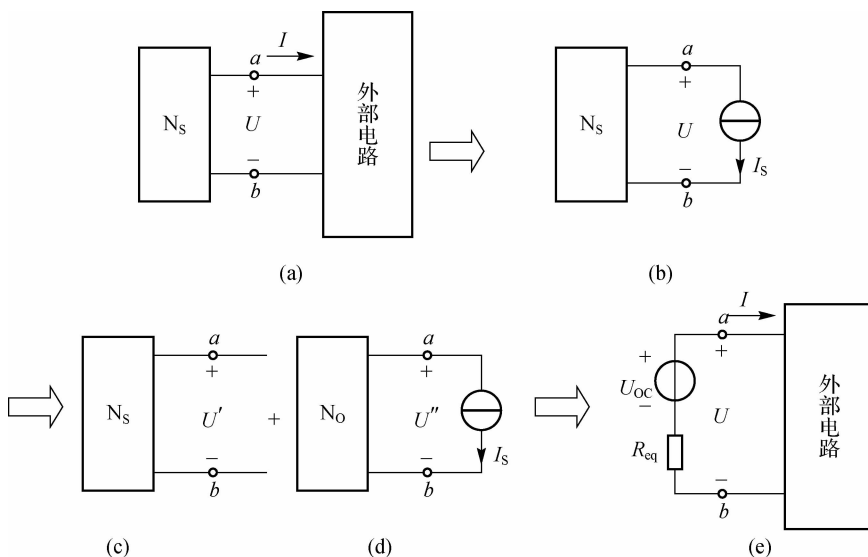


图 2.5.8 戴维南定理的证明

**例 2.12** 电路如图 2.5.9 所示,已知  $E_1 = 3 \text{ V}$ ,  $E_2 = 8 \text{ V}$ ,  $R_1 = 3 \Omega$ ,  $R_2 = 2 \Omega$ ,  $R_3 = 4.8 \Omega$ ,利用戴维南定理,求  $R_3$  两端的电压  $U_{R_3}$ 。

**解** (1)断开待求支路得有源二端网络,则有源二端网络的开路电压  $U_{ab_0}$ 即为等效电源的电动势  $E_0$ 。在由  $E_1$ 、 $E_2$ 、 $R_1$ 、 $R_2$  组成的闭合回路中有

$$I = \frac{E_2 - E_1}{R_1 + R_2} = \frac{8 - 3}{3 + 2} \text{ A} = 1 \text{ A}$$

$$E_0 = U_{ab_0} = E_2 - IR_2 = (8 - 1 \times 2) \text{ V} = 6 \text{ V}$$

(2)求电压源置零后的等效电阻  $R_0$ ,即

$$R_0 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{3 \times 2}{3 + 2} \Omega = \frac{6}{5} \Omega = 1.2 \Omega$$

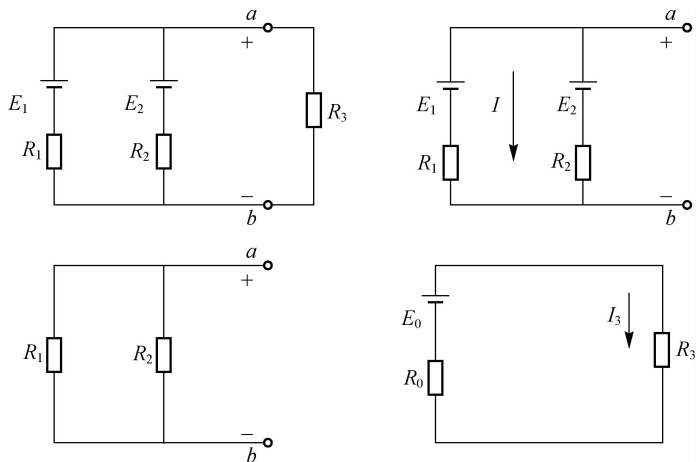


图 2.5.9 例 2.12 图

(3)画等效电路,求解得

$$I_3 = \frac{E_0}{R_0 + R_3} = \frac{6}{1.2 + 4.8} \text{ A} = 1 \text{ A}$$

$$U_{R_3} = I_3 R_3 = 1 \times 4.8 \text{ V} = 4.8 \text{ V}$$

### 3. 诺顿定理

诺顿定理指出:任何线性有源电阻性二端网络  $N_s$ , 都可以用一个电流为  $I_{SC}$  的理想电流源和阻值为  $R_{eq}$  的电阻并联的电路模型来替代。其电流  $I_{SC}$  等于该网络端口短路时的短路电流;  $R_{eq}$  等于该网络中所有独立电源置零时, 从端口看进去的等效电阻。

图 2.5.10(a) 所示的含源一端口  $N_s$  的戴维南等效电路如图 2.5.10(b) 所示, 再根据 2.3 节电源模型的等效变换知, 图 2.5.10(b) 可以等效变换成图 2.5.10(c) 所示的形式。图 2.5.10(c) 所示电路称为  $N_s$  的诺顿等效电路, 其中  $I_{SC}$  是  $N_s$  的端口短路电流,  $G_{eq}$  是  $N_s$  的无源等效电导。

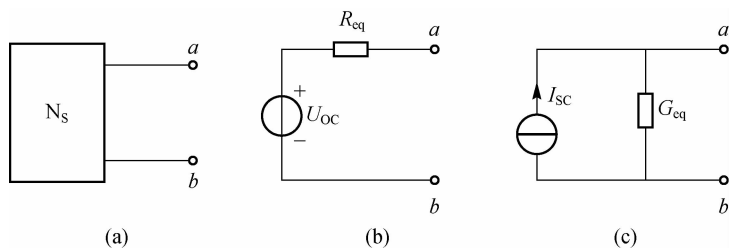


图 2.5.10 诺顿定理图解

诺顿等效电路和戴维南等效电路的关系为

$$G_{eq} = \frac{1}{R_{eq}}, I_{SC} = \frac{U_{OC}}{R_{eq}} \quad (2.5.10)$$

可见, 在诺顿和戴维南等效电路中, 只有  $U_{OC}$ 、 $I_{SC}$  和  $R_{eq}$  (或  $G_{eq}$ ) 三个参数是独立的。由式(2.5.10)可得

$$G_{eq} = \frac{U_{OC}}{I_{SC}} \quad (2.5.11)$$

因此,只要分别求出  $N_S$  的  $U_{OC}$  和  $I_{SC}$ ,就可以利用该式求出  $N_S$  的无源等效电阻。

**例 2.13** 在图 2.5.11(a)所示电路中,试用诺顿定理求  $15\ \Omega$  电阻中的电流。

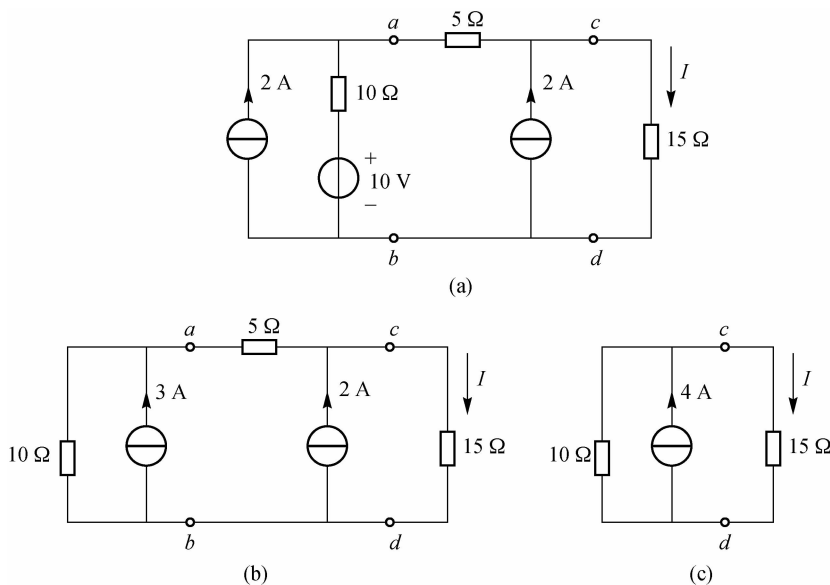


图 2.5.11 例 2.13 图

**解** 如果只用一次诺顿定理直接求含独立源的二端网络  $cd$  的等效电路,计算短路电流比较麻烦。在这种情况下,可以分两步应用诺顿定理,先对  $ab$  左边进行化简,求得

$$I_{SC} = \left(2 + \frac{10}{10}\right) \text{ A} = 3 \text{ A}$$

$$R_{ab} = 10\ \Omega$$

于是得到图 2.5.11(b)。对  $cd$  左边再应用诺顿定理进行化简,有

$$I_{SC} = \left(2 + \frac{10}{10+5} \times 3\right) \text{ A} = 4 \text{ A}$$

$$R_{cd} = (10+5)\ \Omega = 15\ \Omega$$

最后得到图 2.5.11(c),求得

$$I = 4 \times \frac{15}{15+15} \text{ A} = 2 \text{ A}$$

## 本章小结

本章主要以“直流电阻电路的分析”为中心介绍了三个方面的内容:等效变换、电路分析方法和电路定理的应用。

### 1. 等效变换

#### 1) 等效网络的概念

端口电压、电流关系相同的两个网络称为等效网络。等效是指对外等效。

## 2) 无源二端网络的等效变换

(1)  $n$  个电阻串联的等效电阻公式为

$$R = \sum_{k=1}^n R_k$$

分压公式为

$$U_k = \frac{R_k}{R} U$$

(2)  $n$  个电阻并联的等效电导公式为

$$G = \sum_{k=1}^n G_k$$

两电阻并联的等效电阻公式为

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

两电阻并联的分流公式为

$$I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I$$

$$I_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I$$

(3) 电阻三角形联结与星形联结的等效变换。

Y- $\Delta$ 变换公式

$$R_{12} = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_3}$$

$$R_{23} = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_1}$$

$$R_{31} = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_2}$$

 $\Delta$ -Y变换公式

$$R_1 = \frac{R_{12} R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

$$R_2 = \frac{R_{23} R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

$$R_3 = \frac{R_{31} R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

## 3) 有源二端网络的等效变换

一个线性有源二端电阻网络, 对外电路来说, 总可以用一个电压源和电阻串联的模型来代替。该电压源的电压等于有源二端网络的开路电压  $U_{oc}$ , 电阻等于该网络中所有电压源短路、电流源开路时的等效电阻  $R_0$ 。

## 4) 电源两种模型的等效变换

电压源与电阻串联的模型和电流源与电阻并联的模型可以进行等效变换, 公式为

$$\left. \begin{aligned} I_s &= \frac{U_s}{R_s} \\ R'_s &= R_s \end{aligned} \right\}$$

## 2. 电路分析方法

## 1) 支路电流法

支路电流法是以支路电流为未知量, 利用 KVL 和 KCL 列出独立的支路电流方程和独立的回路电压方程, 联立方程求出各支路电流, 然后根据电路的基本关系求出其他未知量。

## 2) 节点电压法

节点电压法是以节点电压为未知量列出节点电压方程, 从而解出节点电压, 然后求出支

## ■ 电路基础

路电流。其中最常用的是适用于两个节点的弥尔曼定理。

### 3) 网孔电流法

以网孔电流为未知量列出网孔电流方程,从而解出网孔电流,用网孔电流来表示支路电流和支路电压。

## 3. 电路定理

### 1) 叠加定理

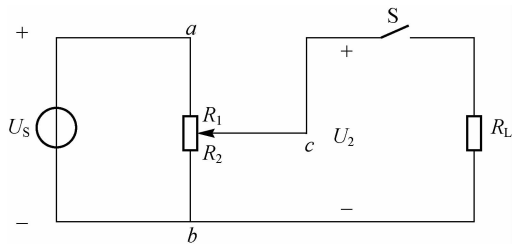
当线性电路中有几个独立电源共同作用时,各支路的电流(或电压)等于各个独立电源单独作用时在该支路产生的电流(或电压)的代数和(叠加)。

### 2) 齐次定理

在线性电路中,当所有电压源和电流源都增大或缩小  $k$  倍( $k$  为实常数)时,支路电流和电压也同样增大或缩小  $k$  倍。

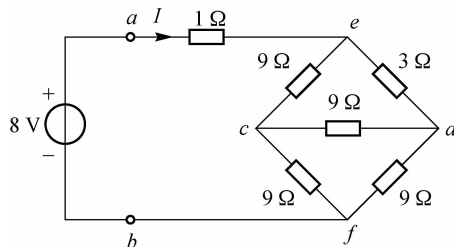
## 习 题

2.1 题图 2.1 所示为一个电阻分压器电路。电阻分压器的固定端  $a$  和  $b$  连接到直流电压源。固定端  $b$  和活动端  $c$  经开关  $S$  连接到负载电阻  $R_L$ 。利用活动端  $c$  的滑动,可向负载电阻输出  $0 \sim U_S$  的可变电压。已知直流电压源电压  $U_S = 30 \text{ V}$ ,活动端  $c$  的位置是  $R_1 = 600 \Omega$ ,  $R_2 = 400 \Omega$ ,求:(1)开关  $S$  打开时输出电压  $U_2$ ; (2)当  $R_L = 1.2 \text{ k}\Omega$  时,开关  $S$  闭合后输出电压  $U_2$ ; (3)当  $R_L = 15 \text{ k}\Omega$  时,开关  $S$  闭合后输出电压  $U_2$ 。



题图 2.1

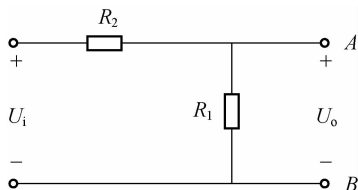
2.2 求题图 2.2 所示桥形电阻电路中的电流  $I$ 。



题图 2.2

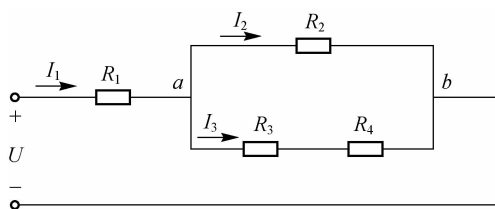
2.3 如题图 2.3 所示为空载分压器电路,设输入的信号电压  $U_i$  为  $50 \text{ V}$ ,  $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 9 \text{ k}\Omega$ ,问从  $AB$  端得到的输出电压  $U_o$  为多少?





题图 2.3

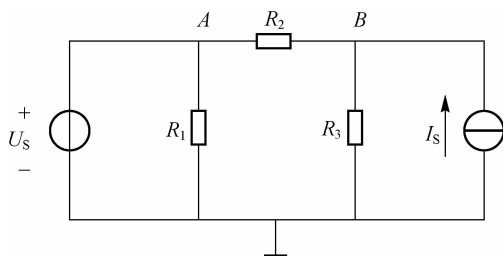
2.4 计算题图 2.4 所示电路中的电流  $I_1$ 。已知电路中  $R_1=10\ \Omega$ ,  $R_2=8\ \Omega$ ,  $R_3=2\ \Omega$ ,  $R_4=6\ \Omega$ , 路端电压  $U=140\ \text{V}$ 。



题图 2.4

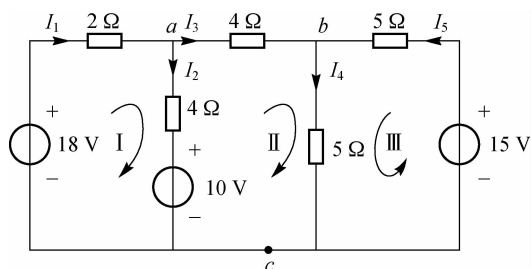
2.5 计算  $1\ \Omega$  电阻和  $40\ \Omega$  电阻的串联等效电阻和并联等效电阻值。

2.6 电路如题图 2.5 所示, 已知  $R_1=3\ \Omega$ ,  $R_2=2\ \Omega$ ,  $R_3=12\ \Omega$ ,  $I_S=4\ \text{A}$ ,  $U_S=6\ \text{V}$ , 求  $U_{AB}$ 。



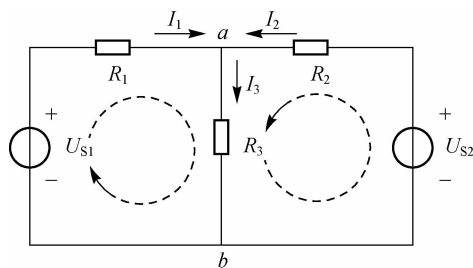
题图 2.5

2.7 根据题图 2.6 所示电路, 列出电路的支路电流方程, 并计算各支路电流。



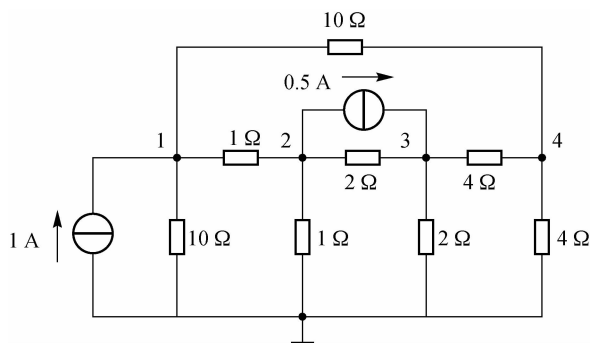
题图 2.6

2.8 题图 2.7 所示电路, 已知  $U_{S1}=220\ \text{V}$ ,  $U_{S2}=180\ \text{V}$ ,  $R_1=2\ \Omega$ ,  $R_2=3\ \Omega$ ,  $R_3=10.8\ \Omega$ , 求各支路电流。



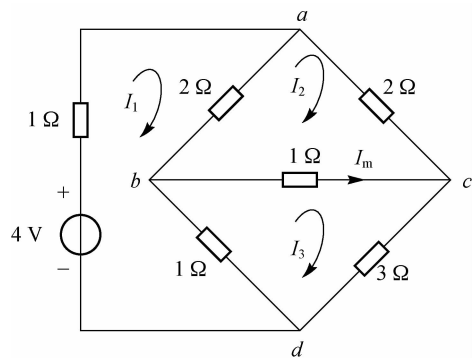
题图 2.7

2.9 列出题图 2.8 所示电路中各节点方程。



题图 2.8

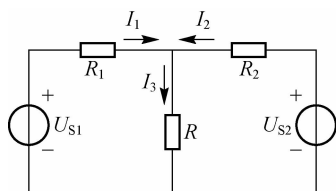
2.10 根据题图 2.9 所示电路,用网孔法求电流  $I_m$ 。



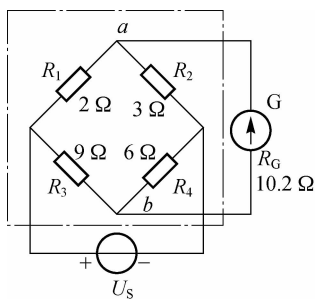
题图 2.9

2.11 在题图 2.10 的电路中,已知  $U_{S1} = 220 \text{ V}$ ,  $U_{S2} = 180 \text{ V}$ ,  $R_1 = 2 \Omega$ ,  $R_2 = 3 \Omega$ ,  $R_3 = 10.8 \Omega$ ,试用叠加定理计算电流  $I_2$ 。

2.12 在题图 2.11 所示的桥式电路中,设  $U_S = 15 \text{ V}$ ,  $R_1 = 2 \Omega$ ,  $R_2 = 3 \Omega$ ,  $R_3 = 9 \Omega$ ,  $R_4 = 6 \Omega$ ,中间支路是一个检流计,其电阻  $R_G = 10.2 \Omega$ 。使用戴维南定理求检流计中的电流  $I_G$ 。

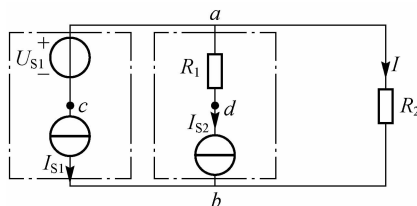


题图 2.10



题图 2.11

2.13 电路如题图 2.12 所示, 已知电压源  $U_{S1} = 1 \text{ V}$ , 电流  $I_{S1} = 1 \text{ A}$ ,  $I_{S2} = 2 \text{ A}$ , 电阻  $R_1 = 3 \Omega$ ,  $R_2 = 4 \Omega$ , 求电路中电流  $I$  和两个电流源的功率。



题图 2.12

在第 2 章所讨论的直流电流和电压,其大小和方向都是不随时间改变的定值,但在实际中正弦交流电的应用更广泛。例如,供电网中的电压、通信技术中的载波频率信号等均是按正弦规律变化的。当电路中的电流和电压都是正弦交流电时,该电路称为正弦交流电路。在正弦交流电路中,若输入的信号(激励)是同一频率的正弦交流电,则电路中任何一处的电压和电流(称响应)也将是同一频率的正弦交流电。这类电路泛称为正弦稳态交流电路。本章主要介绍正弦交流电的基本概念,讨论正弦稳态交流电路的分析和计算方法。

### 3.1 正弦量的三要素

#### 3.1.1 正弦交流电的基本概念

大小和方向随时间做周期性变化且在一个周期内平均值为零的电流(或电压)称为交流电。交流电的变化形式是多种多样的,几种交流电的波形如图 3.1.1 所示。图 3.1.1(a)所示的波形表示随时间按正弦规律变化的电流、电压,称为正弦交流电。正弦交流电流和电压统称为正弦量。在时域范围内正弦量可以用正弦函数表示,也可用余弦函数表示,本书选用正弦函数的形式来表示正弦量。

正弦交流电是指大小和方向随时间按正弦规律做周期性变化的电压和电流。交流电在每一瞬间的数值称为瞬时值,用小写字母  $u$  和  $i$  表示。最大的瞬时值称为幅值或最大值,用注有下标  $m$  的大写字母  $U_m$  和  $I_m$  表示。图 3.1.2 所示是正弦电流的波形,其数学表达式(瞬时值)为

$$i = I_m \sin(\omega t + \varphi_i) \quad (3.1.1)$$

式中,  $I_m$  正弦电流的幅值;  $\omega$  为角频率;  $\varphi_i$  为初相位。

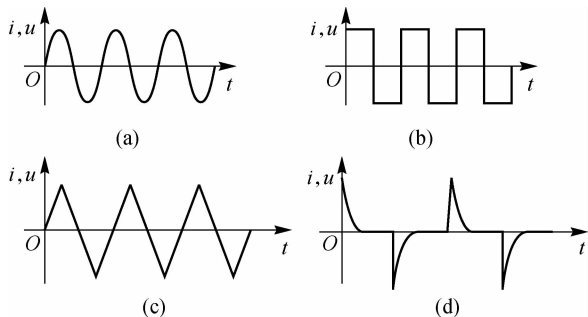


图 3.1.1 几种交流电的波形

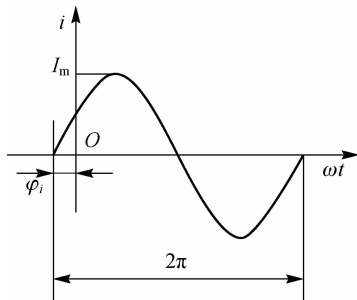


图 3.1.2 正弦交流电压波形图

式(3.1.1)称为正弦电流的瞬时值表达式。正弦量在任意瞬间的值称为瞬时值,用小写字母表示,如用  $i$ 、 $u$  和  $e$  分别表示正弦电流、正弦电压和正弦电动势的瞬时值。利用瞬时值表达式可以计算出任意时刻正弦量的数值。瞬时值的正或负与假定的参考方向比较,便可确定该时刻正弦量的实际方向。

式(3.1.1)和图 3.1.2 表明:一个正弦量的特征表现在它变化的振幅值( $I_m$ )、随时间变化的快慢(角频率)和初始值( $t=0$  时的数值,它取决于  $t=0$  时的角度,即初相位  $\varphi_i$ )三个量值。也就是说,知道了正弦量的这三个量值,一个正弦量就可以被完全确定地描述出来,故称振幅、角频率和初相为正弦量的三要素。任何正弦量都具备三要素。

### 3.1.2 正弦量的基本参数

#### 1. 瞬时值和振幅值

正弦交流电的大小可以用瞬时值、最大值和有效值来表示。正弦交流电在变化过程中,任一时刻的实际值称为瞬时值。最大瞬时值称为最大值或振幅值,又称峰值,是正弦量在整个变化过程中所能达到的最大值,用带有下标  $m$  的大写字母表示,如用  $I_m$ 、 $U_m$ 、 $E_m$  分别表示正弦电流、正弦电压、正弦电动势的振幅值。图 3.1.3 所示的正弦交流电的波形图中的  $U_m$  便是电压的振幅值。振幅值为正值。

用瞬时值或最大值表示的正弦交流电在测量和使用上不方便,为了能够表示正弦交流电的做功效果,又引入有效值来表示正弦交流电的大小,正弦量的最大值是有效值的 $\sqrt{2}$ 倍。

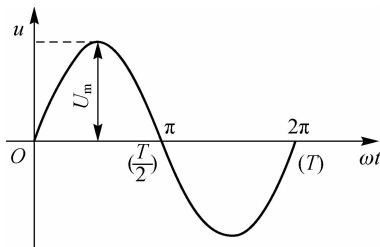


图 3.1.3 正弦交流电的波形

#### 2. 周期和频率

正弦量变化一周所需的时间称为周期。周期通常用  $T$  表示,单位为秒(s)。实用单位有毫秒(ms)、微秒( $\mu$ s)、纳秒(ns)等。

正弦量每秒钟变化的周数称为频率,用  $f$  表示,单位为赫兹(Hz)。周期和频率互成倒数,即

$$f = \frac{1}{T}$$

角频率又称为电角速度,它表示在单位时间内正弦量所经历的电角度。角频率和周期、频率一样,都是反映正弦量变化快慢的量,其单位是弧度/秒(rad/s)。在一个周期内,正弦量所经历的电角度为 2 弧度。由角频率的定义可知,角频率和频率及周期之间的关系为

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

图 3.1.3 中正弦电压的解析式便可写成

$$u = U_m \sin \omega t$$

周期越短,频率越高,正弦量变化越快。直流电也可以看成  $f=0 (T=\infty)$  的正弦量。

在工程实际中,各种不同的交流电频率使用在不同的场合。中国和世界上大多数国家都采用 50 Hz ( $T=0.02$  s) 作为电力工业的标准频率(美、日等少数国家采用 60 Hz),习惯上称为工频。广播电视载波频率为 30~300 MHz 及 0.3~3 GHz。

### 3. 相位、初相和相位差

式(3.1.1)中的  $\omega t + \varphi_i$  称为正弦量的相位。如果已知一个正弦量在某一时刻的相位,可根据  $\omega t + \varphi_i$  确定这个正弦量在该时刻的数值、方向及变化趋势,因此相位表示了正弦量在某时刻的状态。不同相位对应正弦量的不同状态,从这个意义上讲,相位还表示了正弦量的变化进程。

$\varphi_i$  称为正弦电流  $i$  的初相位,简称初相。它是正弦量在  $t=0$  时的相位,即

$$\varphi_i = (\omega t + \varphi_i) |_{t=0} \quad (3.1.2)$$

初相的正负及大小与计时起点的选择有关,通常在  $|\varphi_i| \leq \pi$  的主值范围内取值。如果离坐标原点最近的正弦量的正最大值出现在时间起点之前,则式(3.1.2)中的  $\varphi_i > 0$ ; 如果离坐标原点最近的正弦量的正最大值出现在时间起点之后,则式(3.1.2)中的  $\varphi_i < 0$ 。

正弦量在任意瞬间的相位都与初相有关。显然,正弦量的初相与计时起点(波形图上的坐标原点)的选择有关。由于正弦量一个周期中瞬时值出现两次为零的情况,我们规定正弦量瞬时值由负变正的过零点为正弦波的零值,则正弦量的初相便是由正弦量的零值到计时起点  $t=0$  之间的电角度。图 3.1.4 给出了几种不同计时起点的正弦电流的解析式和波形图。

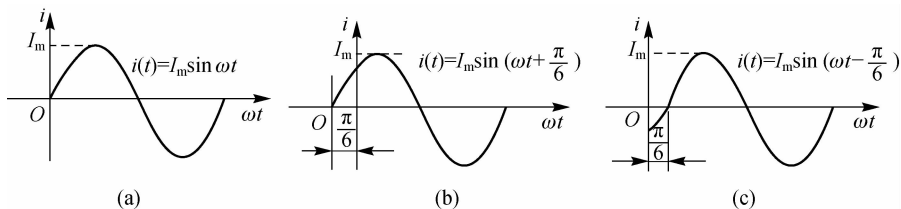


图 3.1.4 几种不同计时起点的正弦电流的解析式和波形图

从图 3.1.4 所示波形图可以看出,如果正弦量以零值为计时起点,则初相  $\varphi_i = 0$ ; 如果零值在坐标原点的左侧,则初相  $\varphi_i$  为正; 如果零值在坐标原点的右侧,则初相  $\varphi_i$  为负。同时可以看出,在  $t=0$  时,函数值的正负与对应初相  $\varphi_i$  的正负号相同。

综上所述,如果知道一个正弦量的振幅、角频率(频率)和初相,就可以完全确定该正弦量,即可以用解析式或波形图将它表示出来。

另外,正弦量的初相与参考方向的选择有关,当参考方向改变后,解析式为

$$-I_m \sin(\omega t + \varphi_i) = I_m \sin(\omega t + \varphi_i \pm \pi) \quad (3.1.3)$$

在正弦电路中,对于两个同频率的正弦量而言,虽然都随时间按正弦规律变化,但是它们随时间变化的进程可能不同。为了描述同频率正弦量随时间变化进程的先后,引入了相位差的概念。两个同频率正弦量的相位之差称为相位差。相位差表示两正弦量到达最大值的先后差距,用字母  $\varphi$  表示。假设两个同频率正弦电动势的表达式分别为

$$e_A = E_{m1} \sin(\omega t + \varphi_1), e_B = E_{m2} \sin(\omega t + \varphi_2)$$

则它们之间的相位差为

$$\varphi = (\omega t + \varphi_2) - (\omega t + \varphi_1) = \varphi_2 - \varphi_1 \quad (3.1.4)$$

可见,两个同频率正弦量的相位差等于初相之差。相位差反映了两个同频率正弦信号在时间上的先后差异。如果以  $e_A$  的初相作为参考点,并且  $\varphi_1 = 0$ ,则  $e_B$  与  $e_A$  之间的相位差就等于  $e_B$  的初相,如图 3.1.5 所示。

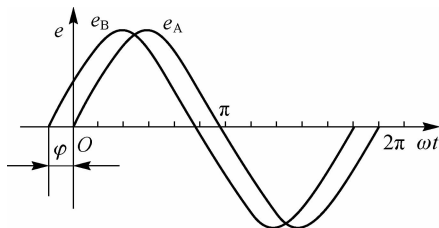


图 3.1.5 不同初相的正弦交流电与相位差

需要注意的是,求不同频率正弦交流量之间的相位差没有意义,因为从式(3.1.2)明显看出,此时  $\varphi$  随着  $t$  的变化而变化。

以两个同频率的正弦交流电流为例,其表达式为

$$i_1 = I_{m1} \sin(\omega t + \varphi_1), i_2 = I_{m2} \sin(\omega t + \varphi_2)$$

则  $i_1$  和  $i_2$  与相位差  $\varphi$  之间的关系如下。

- (1) 若  $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 > 0$ , 则称  $i_1$  超前于  $i_2$ , 如图 3.1.6(a) 所示。
- (2) 若  $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 < 0$ , 则称  $i_1$  滞后于  $i_2$ , 如图 3.1.6(b) 所示。
- (3) 若  $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = 0$ , 则称  $i_1$  和  $i_2$  同相位, 如图 3.1.6(c) 所示。
- (4) 若  $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \pm 180^\circ$ , 则称  $i_1$  和  $i_2$  反相位, 如图 3.1.6(d) 所示。
- (5) 若  $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \pm 90^\circ$ , 则称  $i_1$  和  $i_2$  正交, 如图 3.1.6(e) 所示。

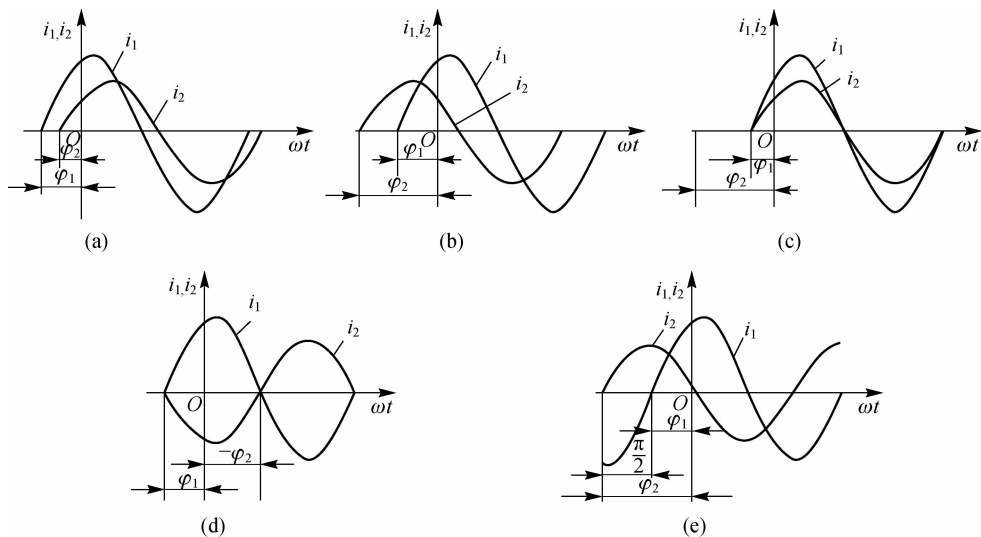


图 3.1.6 两个同频率正弦交流电流的相位关系

通过以上讨论可知,两个同频率正弦量的计时起点不同时,它们的初相不同,但它们的

## ■ 电路基础

相位差不变,即两个同频率正弦量的相位差与计时起点无关。由于初相与参考方向的选择有关,因此相位差也与参考方向的选择有关。

**例 3.1** 在选定的参考方向下,已知两正弦量的解析式分别为  $u=311\sin\left(314t-\frac{4\pi}{3}\right)$  V,  $i=-10\sin\left(100t+\frac{\pi}{6}\right)$  mA,试求这两个正弦量的三要素。

**解** (1)  $u=311\sin\left(314t-\frac{4\pi}{3}\right)=311\sin\left(314t-\frac{4\pi}{3}+2\pi\right)=311\sin\left(314t+\frac{2\pi}{3}\right)$  V,所以电压的振幅值  $U_m=311$  V,角频率  $\omega=314$  rad/s,初相  $\varphi_u=\frac{2\pi}{3}$ 。

(2)  $i=-10\sin\left(100t+\frac{\pi}{6}\right)=10\sin\left(100t+\frac{\pi}{6}-\pi\right)=10\sin\left(100t-\frac{5\pi}{6}\right)$  mA,所以电流的振幅值  $I_m=10$  mA,角频率  $\omega=100$  rad/s,初相  $\varphi_i=-\frac{5\pi}{6}$ 。

### 4. 有效值

正弦量的瞬时值是随时间变化的,无论是测量还是计算都不方便,也不能确切地反映在能量转换方面的实际效果;而用正弦量的最大值则夸大了在能量转换方面的效果。因此,在工程实际中,常采用交流电的有效值。有效值用大写字母表示,如  $I$ 、 $U$  分别表示电流、电压的有效值。

#### 1) 交流电的有效值

交流电的有效值是根据它的热效应确定的。如果某交流电流  $i$  和直流电流  $I$  分别通过同一电阻  $R$ ,在一个周期  $T$  内电阻所消耗的能量相等,也就是说就热效应而言,两者是相同的,那么这个直流电流  $I$  的数值称为交流电流  $i$  的有效值。由此得出

$$I^2 RT = \int_0^T i^2 R dt$$

所以,交流电流的有效值为

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} \quad (3.1.5)$$

同理,交流电压的有效值为

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2 dt} \quad (3.1.6)$$

交流电的有效值等于它的瞬时值的平方在一个周期的平均值的算术平方根,所以有效值又称均方根值。

#### 2) 正弦量的有效值

对于正弦交流电流来说,将  $i=I_m \sin(\omega t + \varphi)$  代入式(3.1.5),可得它的有效值为

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \approx 0.707 I_m \quad (3.1.7)$$

同理,正弦电压的有效值为

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \approx 0.707 U_m \quad (3.1.8)$$

可见,正弦量的有效值等于它的振幅值除以  $\sqrt{2}$ 。因此,有效值可以代替振幅值作为正弦



量的一个要素。引入有效值后,正弦电压、电流可写成

$$u = \sqrt{2}U\sin(\omega t + \varphi_u), i = \sqrt{2}I\sin(\omega t + \varphi_i)$$

通常所说的正弦交流电压、电流的大小都是指有效值。例如,民用交流电压 220 V、工业用电电压 380 V,测量交流电压和交流电流的各种仪表所指示的数值,交流电气设备铭牌上的额定值等都指的是有效值。一般只有在分析电气设备(如电路元件)的耐压能力时,才会用到最大值。

**例 3.2** 一个正弦电流的初相为  $60^\circ$ ,在  $t = \pi/4$  时的电流值为 5 A,试求该电流的有效值。

**解** 由题意可知,该正弦电流的解析式为

$$i = \sqrt{2}I\sin(\omega t + 60^\circ) \text{ A}$$

由已知条件得

$$5 = \sqrt{2}I\sin\left(\omega \frac{T}{4} + 60^\circ\right) \text{ A} = \sqrt{2}I\sin\left(\frac{2\pi}{T} \frac{T}{4} + \frac{\pi}{3}\right) \text{ A} = \sqrt{2}I\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) \text{ A}$$

所以有效值  $I = 7.07 \text{ A}$ 。

## 3.2 正弦量的相量表示及运算

如前所述,一个正弦量可以用三角函数式和波形图表示,因为这两种表示法都能够反映正弦量的三要素。在实际的正弦交流电路分析中,常常需要进行电压和电流的运算。虽然这两种方法比较直观,但用它们来分析和计算正弦交流电路将会非常烦琐;三角函数在计算上比较麻烦,而波形图表示法需要逐点描述,既费时又不准确。为了简化电路的分析运算,行之有效的方法是采用相量表示法。

由于相量表示法要涉及复数的运算,所以在介绍相量表示法前,先对复数的有关知识进行简要介绍。

### 3.2.1 复数及其四则运算

#### 1. 复数的基本特征

复数是两个实数以一定的方式组合起来的一种数,它与复平面上的点一一对应。很多由两个要素决定的事物可以用复数来表示,如复数可以代表具有大小和方向两个要素的力、速度、加速度、电场强度、磁感应强度等。

在数学中,通常用  $A = a + bi$  表示复数,其中  $a$  为实部, $b$  为虚部, $i$  为虚数单位。在电气工程中,为区别于电流的符号,虚数单位常用  $j$  代替  $i$ ,即用  $A = a + bj$  表示复数。

复数在复平面上可以找到与之对应的一个点,图 3.2.1 中的  $A$  点就是与复数  $A$  相对应的点。图中, $+1$  表示实轴, $+j$  表示虚轴,实轴与虚轴是相互垂直的。 $A$  点在实轴上的投影坐标是  $A$  的实部,在虚轴上的投影坐标是其虚部。

再用有向线段连接坐标原点  $O$  和点  $A$ ,在线段末端带有箭头,成为一个矢量,该矢量就与复数  $A$  对应。这种表示复数的矢量称为复矢量。 $OA$  的长度  $r$  为复数的模,即

$$r = |A| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (3.2.1)$$

复矢量  $OA$  和实轴正方向的夹角称为复数  $A$  的辐角,即

$$\varphi = \arctan \frac{b}{a} \quad (|\varphi| \leq \pi) \quad (3.2.2)$$

不难看出,复数  $A$  的模在实轴上的投影就是复数  $A$  的实部,在虚轴上的投影就是复数

A 的虚部,即

$$a = r \cos \varphi, b = r \sin \varphi \quad (3.2.3)$$

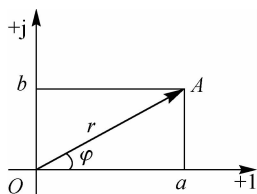


图 3.2.1 复数的表示

## 2. 复数的表示形式

(1) 复数的代数形式。

$$A = a + jb$$

(2) 复数的三角函数形式。

$$A = r \cos \varphi + jr \sin \varphi$$

(3) 复数的指数形式。

根据欧拉公式

$$e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi$$

可得到复数的指数形式为

$$A = r e^{j\varphi}$$

(4) 复数的极坐标形式。在电路中,复数的模和辐角通常用更简明的极坐标形式表示,即

$$A = r \angle \varphi$$

在以后的运算中,经常会用到复数的代数形式和极坐标形式,它们之间的换算方法应熟练掌握。

**例 3.3** 现有复数  $A_1 = 3 + j4$ ,  $A_2 = 100 \angle 45^\circ$ , 求它们的其他三种表示式。

**解** 对复数  $A_1$ , 将代数式化为三角函数式、指数式、极坐标式, 由  $A_1 = 3 + j4$  知  $a = 3$ ,  $b = 4$ , 由式(3.2.1)、式(3.2.2)可得

$$\text{模 } r_1 = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$\text{辐角 } \varphi_1 = \arctan \frac{b}{a} = \arctan \frac{4}{3} = 53^\circ$$

$$\text{所以三角函数式为 } A_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + j \sin \varphi_1) = 5 (\cos 53^\circ + j \sin 53^\circ)$$

$$\text{指数式为 } A_1 = r_1 e^{j\varphi_1} = 5 e^{j53^\circ}$$

$$\text{极坐标式为 } A_1 = r_1 \angle \varphi_1 = 5 \angle 53^\circ$$

对复数  $A_2$ , 将极坐标式化为代数式、三角函数式、指数式, 由  $A_2 = 100 \angle 45^\circ$  可知模  $r_2 = 100$ , 辐角  $\varphi_2 = 45^\circ$ 。由式(3.2.3)可得

$$a = r_2 \cos \varphi_2 = 100 \cos 45^\circ = 50\sqrt{2}$$

$$b = r_2 \sin \varphi_2 = 100 \sin 45^\circ = 50\sqrt{2}$$

$$\text{所以代数式为 } A_2 = a + jb = 50\sqrt{2} + j50\sqrt{2}$$

$$\text{三角函数式为 } A_2 = r_1 (\cos \varphi_2 + j \sin \varphi_2) = 100 (\cos 45^\circ + j \sin 45^\circ)$$

$$\text{指数式为 } A_2 = r_2 e^{j\varphi_2} = 100 e^{j45^\circ}$$

### 3. 复数的四则运算

设两个复数  $A$ 、 $B$  分别为

$$A = a_1 + jb_1 = r_1 \angle \varphi_1, B = a_2 + jb_2 = r_2 \angle \varphi_2$$

(1) 加减运算。在一般情况下,复数的加减法运算应采用代数式,如

$$A \pm B = (a_1 \pm a_2) + j(b_1 \pm b_2) \quad (3.2.4)$$

即两个复数相加减,等于它们的实部和实部相加减,虚部和虚部相加减。

复数的加减运算还可以用矢量合成进行分析,利用平行四边形法则进行运算,如图 3.2.2 所示。

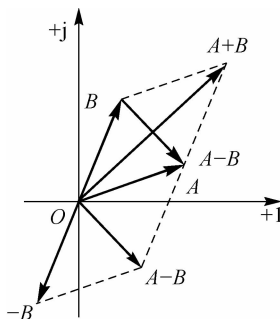


图 3.2.2 矢量的平行四边形法则

(2) 乘除运算。在一般情况下,复数的乘除运算应采用极坐标形式,如

$$A \cdot B = r_1 \angle \varphi_1 \cdot r_2 \angle \varphi_2 = r_1 r_2 \angle (\varphi_1 + \varphi_2)$$

$$\frac{A}{B} = \frac{r_1 \angle \varphi_1}{r_2 \angle \varphi_2} = \frac{r_1}{r_2} \angle (\varphi_1 - \varphi_2)$$

即复数相乘,模相乘,辐角相加;复数相除,模相除,辐角相减。

**例 3.4** 已知复数  $A=4+j3$ ,  $B=3+j4$ , 试计算  $A+B$ 、 $A-B$ 、 $AB$ 、 $A/B$ 。

**解** 用代数式进行复数的加减法运算比较简便。

$$A + B = (4 + j3) + (3 + j4) = (4 + 3) + j(3 + 4) = 7 + j7$$

$$A - B = (4 + j3) - (3 + j4) = (4 - 3) + j(3 - 4) = 1 - j$$

用极坐标式进行复数的乘除法运算。

$$A = 4 + j3 = 5 \angle 37^\circ, B = 3 + j4 = 5 \angle 53^\circ$$

$$AB = (5 \angle 37^\circ)(5 \angle 53^\circ) = 25 \angle 90^\circ$$

$$A/B = (5 \angle 37^\circ)/(5 \angle 53^\circ) = 1 \angle -16^\circ$$

当然,复数的乘除法也可以采用代数式的形式进行运算,当计算数字较小、辐角  $\varphi$  不是特殊角度且不要求出角度时,计算较方便。

#### 3.2.2 正弦量的相量表示法

根据欧拉公式,正弦电压可写为

$$\begin{aligned} u(t) &= U_m \cos(\omega t + \varphi_u) = \operatorname{Re}[U_m e^{j(\omega t + \varphi_u)}] \\ &= \operatorname{Re}[U_m e^{j\varphi_u} e^{j\omega t}] = \operatorname{Re}[U_m e^{j\omega t}] \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

这样,一个余弦时间函数(它是实函数)可以用一个复指数函数来表示,式中复常数

$$U_m = |U_m| e^{j\varphi_u} = U_m e^{j\varphi_u} = U_m \angle \varphi_u \quad (3.2.6)$$

相量和复数一样,可以在复平面上用矢量表示,如图 3.2.3(a)所示,这种表示相量的图称为相量图。有时为了简练、醒目,常省去坐标轴,如图 3.2.3(b)所示。

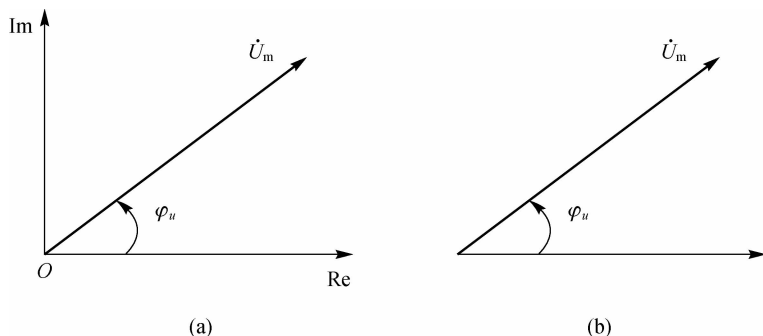


图 3.2.3 相量图

式(3.2.5)中的  $e^{j\omega t}$  称为旋转因子,它是模等于 1、初相为 0,并以角速度  $\omega$  逆时针旋转的复指数函数。式中的复指数函数  $U_m e^{j\omega t}$  等于相量  $U_m$  乘以旋转因子  $e^{j\omega t}$ ,称为旋转相量, $U_m$  称为旋转相量的复振幅。

### 1. 旋转因子

模等于 1 的复数称为旋转因子。若设  $Z_0$  是一个旋转因子,则  $Z_0 = 1 \angle \theta$ 。一个复数  $Z$  乘以旋转因子,即  $Z \cdot Z_0 = r \angle \theta_1 \cdot 1 \angle \theta = r \angle (\theta_1 + \theta)$ ,这说明任何一个复数  $Z$  乘以旋转因子相当于将该复数沿逆时针方向旋转  $\theta$  角,如图 3.2.4 所示。

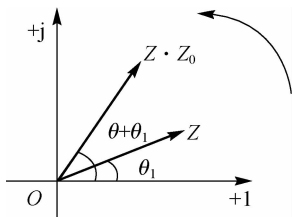


图 3.2.4 一个复数乘以旋转因子

几个常用的旋转因子如下。

- (1)  $j = 1 \angle 90^\circ$ ,复数  $Z$  乘以该旋转因子,相当于将复数沿逆时针方向旋转  $90^\circ$  角。
- (2)  $-j = 1 \angle -90^\circ$ ,复数  $Z$  乘以该旋转因子,相当于将复数沿顺时针方向旋转  $90^\circ$  角。
- (3)  $-1 = 1 \angle 180^\circ$ ,复数  $Z$  乘以该旋转因子,相当于将复数沿逆时针方向旋转  $180^\circ$  角。

引入旋转相量的概念后,可以说明式(3.2.5)对应关系的几何意义,即一个正弦量在任意时刻的瞬时值,等于对应的旋转相量同一时刻在实轴上的投影。图 3.2.5 画出了旋转相量  $U_m e^{j\omega t}$  与正弦量  $U_m \cos(\omega t + \varphi_u)$  的对应关系。 $t=0$  时,旋转相量  $U_m = U_m e^{j\varphi_u}$ ,它在实轴上的投影为  $U_m \cos \varphi_u$ ,对应于正弦量  $u$  在  $t=0$  时的值; $t=t_1$  时,旋转相量  $U_m e^{j\omega t_1} = U_m e^{j(\omega t_1 + \varphi_u)}$ ,它在实轴上的投影为  $U_m \cos(\omega t_1 + \varphi_u)$ ,对应于正弦量  $u$  在  $t=t_1$  时的值。以此类推,对任意时刻  $t$ ,旋转相量

$$U_m e^{j\omega t} = U_m e^{j(\omega t + \varphi_u)}$$

在实轴上的投影对应于正弦电压

$$u = U_m \cos(\omega t + \varphi_u)$$

旋转相量的角速度  $\omega$  就是正弦量的角频率。

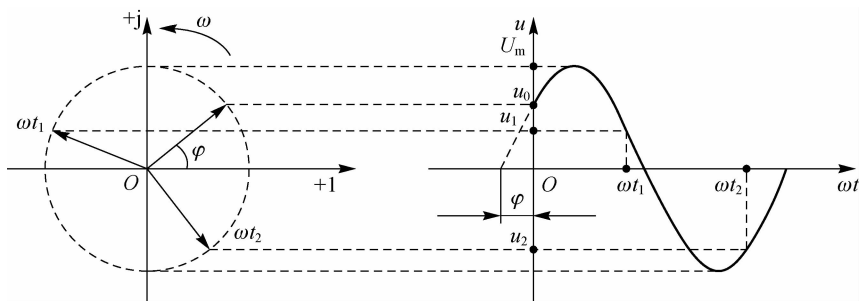


图 3.2.5 正弦电压与旋转相量

任何正弦时间函数都有唯一的旋转相量(复指数函数)与之对应;反之,任意旋转相量也有唯一的正弦量与之对应。因此,可以用相量来表示正弦量。这种对应关系简单,可以直接写出。

正弦电压也可用有效值表示,即

$$u(t) = \sqrt{2}U \cos(\omega t + \varphi_u) = \operatorname{Re}[\sqrt{2}U e^{j\omega t}] \quad (3.2.7)$$

式中

$$\dot{U} = U e^{j\varphi_u} = U \angle \varphi_u \quad (3.2.8)$$

称为电压的有效值相量。它与振幅相量也有固定的关系,即

$$\dot{U} = \frac{1}{\sqrt{2}} \dot{U}_m$$

同样地,正弦电流也可写为

$$\begin{aligned} i(t) &= I_m \cos(\omega t + \varphi_i) = \operatorname{Re}[I_m e^{j\omega t}] \\ &= \sqrt{2}I \cos(\omega t + \varphi_i) = \operatorname{Re}[\sqrt{2}I e^{j\omega t}] \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_m &= I_m e^{j\varphi_i} = I_m \angle \varphi_i \\ \dot{I} &= I e^{j\varphi_i} = I \angle \varphi_i \end{aligned} \right\} \quad (3.2.10)$$

分别称为电流的振幅相量和有效值相量,它们的关系为

$$\dot{I} = \frac{1}{\sqrt{2}} \dot{I}_m$$

## 2. 正弦量的相量图

相量只能表示正弦量三要素中的两个,角频率需另加说明。只有同频率的正弦量其相量才能画在同一复平面上,画在同一复平面上表示相量的图称为相量图。由于频率相同,各相量在图中的位置是固定不变的。因此,以相量图为基础,通过矢量运算就可进行正弦量的计算,这种方法称为相量图法。相量图法亦属于相量法,它比相量的复数算法更形象、直观、简明,是简化交流电路计算的一种很有效的方法。

应用相量图法时,需要注意如下几点。

(1) 同频率的正弦量才能画在同一个相量图上。因为同频率的交流电在任何瞬间的相位差不变。在相量图中,它们之间的相对位置不变,从而能在同一相量图中分析同频率各正

## ■ 电路基础

弦量间的关系,并能用平行四边形法则对交流量进行加减运算。

(2)同类型的正弦量必须按其大小成比例画出才能进行比较。

(3)实际决定各相量之间关系的是相位差。因此,可取某一相量作为参考相量(取其初相位等于零),各相量在相量图上的位置便可由它们与参考相量的相位差来确定。

**例 3.5** 已知  $i_1=8\sin(314t+60^\circ)$  A,  $i_2=6\sin(314t-30^\circ)$  A, 试求  $i=i_1+i_2$ 。

**解** 先作出电流  $i_1$  和  $i_2$  的相量图,然后求相量和,如图 3.2.6 所示。

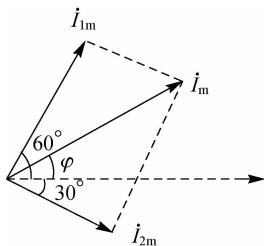


图 3.2.6 例 3.5 的相量图

因为  $i_1$  和  $i_2$  的相位差为

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = 60^\circ - (-30^\circ) = 90^\circ$$

所以总电流的幅值为

$$I_m = \sqrt{I_{1m}^2 + I_{2m}^2} \text{ A} = \sqrt{8^2 + 6^2} \text{ A} = 10 \text{ A}$$

总电流的初相位为

$$\varphi = 60^\circ - \arctan 6/8 = 60^\circ - 37^\circ = 23^\circ$$

所以

$$i=10\sin(314t+23^\circ) \text{ A}$$

## 3.3 单一参数的交流电路

在稳定的直流电路中,电容器和电感线圈不产生相应的作用,所以只有电阻元件。但在交流电路中不但要考虑电阻元件,还要考虑电感线圈和电容器。

对于一个实际的元件,常同时存在电阻、电感和电容三个参数的作用,但它们在电路中的作用往往有主有次。为了简化分析,一般只考虑主要参数的作用,这个元件就变成只有一个参数的理想元件。

电阻、电感、电容是电路中的三大基本元件,由电阻、电感、电容单个元件组成的正弦交流电路是最简单的交流电路,这种电路称为单一参数元件电路或纯参数元件电路。复杂交流电路可以看成是由若干个单一参数元件电路组成的,因此分析单一参数元件电路的特性是基础。下面将分别对电阻、电感、电容元件的电压、电流关系及能量关系进行讨论分析。

### 3.3.1 电阻元件上相量形式的伏安特性

#### 1. 电阻元件的伏安特性

在只有电阻丝、白炽灯或电烙铁等作用的电路中,电阻起主要作用,可以近似为纯电阻电路。如图 3.3.1 所示,当线性电阻  $R$  两端加上正弦电压  $u_R$  时,电阻中便有正弦电流  $i_R$  流

过。电压  $u_R$  和电流  $i_R$  的瞬时值仍服从欧姆定律。

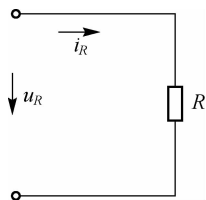


图 3.3.1 电阻元件上的正弦量

在电压和电流的关联参考方向下,设电压为

$$u_R = U_{Rm} \sin \omega t = \sqrt{2} U_R \sin \omega t \quad (3.3.1)$$

根据欧姆定律,电路中流过的电流为

$$\begin{aligned} i_R &= \frac{u_R}{R} = \frac{U_{Rm}}{R} \sin \omega t = \sqrt{2} \frac{U_R}{R} \sin \omega t \\ &= I_{Rm} \sin \omega t = \sqrt{2} I_R \sin \omega t \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

式(3.3.2)表明:电阻元件两端电压  $u_R$  和电流  $i_R$  为同频率同相位的正弦量。比较电压和电流的解析式,它们之间的关系如下。

1) 大小关系

电流与电压最大值的关系为

$$I_{Rm} = \frac{U_{Rm}}{R} \quad (3.3.3)$$

电流与电压有效值的关系为

$$I_R = \frac{U_R}{R} \quad (3.3.4)$$

即电压与电流的最大值和有效值均服从欧姆定律。

2) 相位关系

在关联参考方向下,电流和电压同相。图 3.3.2 所示为正弦电压初相为零时,电压和电流的波形图。

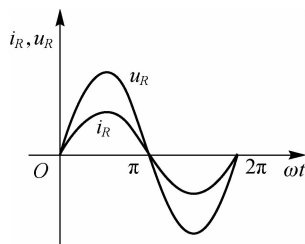


图 3.3.2 电阻元件上电压、电流波形图

## 2. 相量形式的伏安特性

设电压、电流相量分别为

$$\begin{aligned}\dot{U} &= Ue^{j0^\circ}, \dot{I} = Ie^{j0^\circ} \\ \frac{\dot{U}}{\dot{I}} &= \frac{Ue^{j0^\circ}}{Ie^{j0^\circ}} = \frac{U}{I}e^{j(0^\circ-0^\circ)} = \frac{U}{I} = R\end{aligned}$$

即 
$$\frac{\dot{U}}{\dot{I}} = R \quad (3.3.5)$$

式(3.3.5)称为相量形式的欧姆定律,它不但能表示电压和电流有效值的大小关系,还能表示相位关系,对分析和计算电路非常重要。有如下结论。

(1)电阻元件的电压和电流的瞬时值、有效值、相量形式的关系都服从欧姆定律形式。

(2)电阻元件的电压和电流同频同相。

在正弦交流电路中,电阻元件上的电压瞬时值与电流瞬时值的乘积称为该元件的瞬时功率,用小写字母  $p$  表示,即

$$p = ui \quad (3.3.6)$$

在电压和电流的关联参考方向下,将式(3.3.1)和式(3.3.2)代入式(3.3.6),得

$$\begin{aligned}p &= ui = U_m \sin \omega t \cdot I_m \sin \omega t = 2UI \sin^2 \omega t \\ &= UI(1 - \cos 2\omega t)\end{aligned} \quad (3.3.7)$$

根据式(3.3.7),在图 3.3.3(a)中可以画出瞬时功率的波形图,如图 3.3.4 所示。

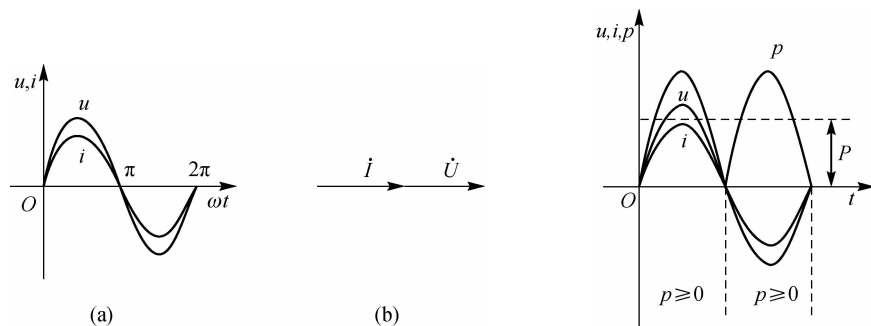


图 3.3.3 电压和电流的关系

图 3.3.4 纯电阻电路的瞬时功率

由图 3.3.4 可以看出,瞬时功率的频率是电压、电流频率的两倍,并且  $p \geq 0$ ,即电阻永远处于吸收电能的状态,是耗能元件。

瞬时功率在一个周期内的平均值称为平均功率。对于稳定的正弦交流电,平均功率不变,所以用大写字母  $P$  表示,即

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{1}{T} \int_0^T UI(1 - \cos 2\omega t) dt = UI = I^2 R = \frac{U^2}{R} \quad (3.3.8)$$

平均功率是电路中实际消耗的功率,所以又称有功功率。通常在用电器铭牌上标注的功率都是指平均功率。

**例 3.6** 已知电阻元件  $R=2\ 000\ \Omega$ ,外加电压  $u=120\sqrt{2}\sin(1\ 000t-30^\circ)\text{ V}$ ,求流过电阻的电流  $i$ 。



解  $u \rightarrow \dot{U} = 120 \angle -30^\circ \text{ V}$ , 电阻  $R = 2\,000 \, \Omega$ , 根据式(3.3.4)有

$$\dot{U} = R\dot{I}$$

所以

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{R} = \frac{120 \angle -30^\circ}{2\,000} = 0.06 \angle -30^\circ \text{ A}$$

于是

$$\dot{I} \rightarrow i = 0.06\sqrt{2}\sin(1\,000t - 30^\circ) \text{ A}$$

### 3.3.2 电感元件上相量形式的伏安特性

#### 1. 电感元件的伏安特性

由电感元件上的伏安关系可知, 在图 3.3.5 所示的关联参考方向下, 有

$$u_L = L \frac{di_L}{dt} \quad (3.3.9)$$

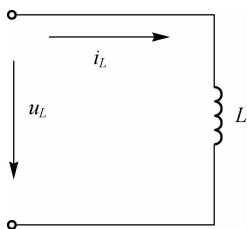


图 3.3.5 电感元件上的正弦量式

式(3.3.9)是电感元件上电压和电流的瞬时关系式, 二者是微分关系, 而不是正比关系。设电流为

$$i_L = I_{Lm} \sin(\omega t + \varphi_i) = \sqrt{2}I_L \sin(\omega t + \varphi_i)$$

则电感元件的端电压为

$$u_L = L \frac{di_L}{dt} = \omega L I_{Lm} \cos(\omega t + \varphi_i) = \omega L I_{Lm} \sin(\omega t + \varphi_i + 90^\circ) = U_{Lm} \sin(\omega t + \varphi_u)$$

上式表明: 电感元件两端电压  $u_L$  和电流  $i_L$  为同频率的正弦量。比较电压和电流的解析式, 它们之间的关系如下。

1) 大小关系

电流与电压最大值的关系为

$$U_{Lm} = \omega L I_{Lm}$$

电流与电压有效值的关系为

$$U_L = \omega L I_L = X_L I_L \quad (3.3.10)$$

其中

$$X_L = \omega L = 2\pi f L \quad (3.3.11)$$

式中,  $X_L$  称为感抗, 单位为欧姆( $\Omega$ ); 感抗的倒数  $B_L = \frac{1}{X_L} = \frac{1}{\omega L}$ , 称为感纳, 单位为西门子(S)。

感抗是用来表示电感元件对电流阻碍作用的物理量。在电压一定的条件下, 感抗越大, 电路中的电流越小。式(3.3.11)表明, 感抗与电源的频率(角频率)成正比。电源频率越高,

感抗越大,表示电感对电流的阻碍作用越大;反之,频率越低,感抗也就越小。对直流电来说,频率为零,感抗也就为零,电感元件在直流电路中相当于短路,即电感元件具有“通直流、阻交流”或“通低频、阻高频”的特性。在滤波电路、微分电路中,电感元件就是根据这一特性工作的,在实际电路中应用的高频扼流圈也是利用这一原理制成的。

### 2) 相位关系

电流与电压初相的关系为

$$\varphi_u = \varphi_i + 90^\circ \quad (3.3.12)$$

即在关联参考方向下,电感元件上的电压较电流超前  $90^\circ$ ,或者说电流滞后电压  $90^\circ$ 。电感元件上电流和电压的波形关系如图 3.3.6 所示(波形图中  $\varphi_i = 0^\circ, \varphi_u = 90^\circ$ )。

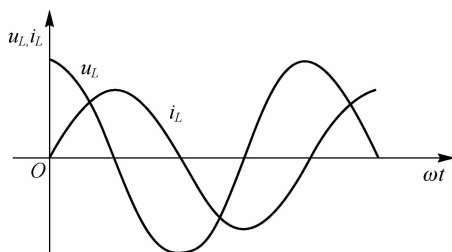


图 3.3.6 电感元件上电流和电压的波形关系

## 2. 相量形式的伏安特性

用有效值相量形式表示电压和电流关系有

$$\begin{aligned} \dot{U} &= U e^{j\frac{\pi}{2}} \\ \dot{I} &= I e^{j0^\circ} \\ \frac{\dot{U}}{\dot{I}} &= \frac{U e^{j0^\circ}}{I e^{j0^\circ}} = \frac{U}{I} e^{j\frac{\pi}{2}} = jX_L \\ \dot{U} &= jX_L \dot{I} \end{aligned} \quad (3.3.13)$$

式(3.3.13)称为相量形式的欧姆定律,它不但能表示电压和电流有效值的大小关系,而且还能表示相位关系,对分析和计算非常重要。

从以上内容可以得出如下结论。

(1) 电感元件的电压和电流的瞬时值之间不服从欧姆定律形式,有效值、相量形式的关系服从欧姆定律形式。

(2) 电感元件的电压和电流同频,在相位上,电压超前电流  $\pi/2$ 。

在正弦交流电路中,电感元件上的电压瞬时值与电流瞬时值的乘积称为该元件的瞬时功率,用小写字母  $p$  表示,即

$$p = ui \quad (3.3.14)$$

设流过电感元件的电流为  $i_L = I_m \sin \omega t$ ,则在关联参考方向下,电感元件两端的电压为

$$u_L = U_m \sin(\omega t + 90^\circ)$$

将  $i_L$  和  $u_L$  的表达式代入式(3.3.14),得

$$p = ui = U_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \cdot I_m \sin \omega t = UI \sin 2\omega t \quad (3.3.15)$$

根据式(3.3.15),在图3.3.7(a)中可以画出瞬时功率的波形图,如图3.3.8所示。由图3.3.8可以看出,瞬时功率的频率是电压、电流频率的两倍,并且在一个周期内吸收的电能与放出的电能相等,所以电感不消耗电能,是储能元件。

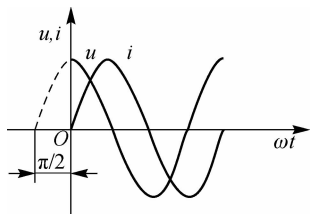


图 3.3.7 电压和电流的关系

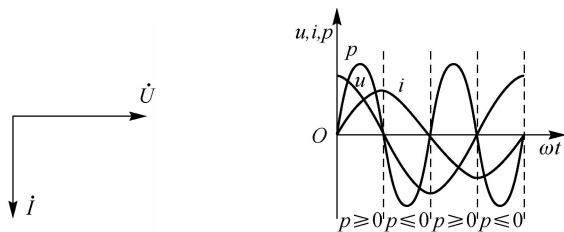


图 3.3.8 纯电感电路的瞬时功率

电感电路中没有电能的损耗,所以瞬时功率在一个周期内的平均值为零,这一点也可以从图3.3.8中显示出来。由电感的平均功率也可以计算出来,即

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{1}{T} \int_0^T UI \sin 2\omega t dt = 0$$

虽然在电感电路中没有电能损耗,但是电感能够存储电能。为了衡量电感元件与外间交换能量的规模,引入无功功率,用 $Q$ 表示,在数值上等于瞬时功率的最大值,即

$$Q = UI \quad (3.3.16)$$

无功功率的单位是乏(var)。

**例 3.7** 有一电感线圈,其电感 $L=0.5 \text{ H}$ ,接在 $u=220\sqrt{2}\sin 314t \text{ V}$ 的电源上,试求:(1)感抗 $X_L$ ; (2)电路中电流 $I$ 及其与电压的相位差 $\varphi$ ; (3)无功功率 $Q$ 。

**解** (1)  $X_L = \omega L = 314 \times 0.5 \Omega = 157 \Omega$ 。

(2) 电压相量 $\dot{U} = U \angle \varphi = \frac{220\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \angle 0^\circ = 220 \angle 0^\circ = 220 \text{ V}$

由式(3.3.13)可得

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{jX_L} = \frac{220}{j157} \approx -j1.4 = 1.4 \angle -90^\circ \text{ A}$$

即电流有效值 $I=1.4 \text{ A}$ 。相位滞后电压 $90^\circ$ 。

(3)  $Q=UI=220 \times 1.4 \text{ var}=308 \text{ var}$ 。

### 3.3.3 电容元件上相量形式的伏安特性

#### 1. 电容元件的伏安特性

电容元件上的伏安关系曾在第2章讲过,在图3.3.9所示的关联参考方向下,有

$$i_C = C \frac{du_C}{dt} \quad (3.3.17)$$

由式(3.3.17)可知,电容元件上电压和电流的瞬时关系也是微分关系。

设电压为

$$u_C = U_{Cm} \sin(\omega t + \varphi_u) = \sqrt{2} U_C \sin(\omega t + \varphi_u)$$

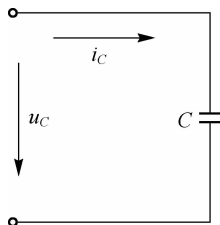


图 3.3.9 电容元件上的正弦量

则流过电容元件的电流为

$$i_C = C \frac{du_C}{dt} = \omega C U_{Cm} \cos(\omega t + \varphi_u)$$

$$= \omega C U_{Cm} \sin(\omega t + \varphi_u + 90^\circ) = I_{Cm} \sin(\omega t + \varphi_i)$$

可以看出,  $u_C$ 、 $i_C$  为同频率的正弦量。比较电压和电流的解析式, 它们之间的关系如下。

1) 大小关系

电流与电压最大值的关系为

$$U_{Cm} = \frac{1}{\omega C} I_{Cm}$$

电流与电压有效值的关系为

$$U_C = \frac{1}{\omega C} I_C = X_C I_C \quad (3.3.18)$$

其中

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} \quad (3.3.19)$$

式中,  $X_C$  称为容抗, 单位为欧姆( $\Omega$ )。容抗的倒数  $B_C = \frac{1}{X_C} = \omega C$  称为容纳, 单位为西门子(S)。

容抗表示电容在充、放电过程中对电流的一种阻碍作用。在一定的电压下, 容抗越大, 电路中的电流越小。

式(3.3.19)表明容抗  $X_C$  与电源的频率(角频率)成反比。电源频率越高, 容抗越小, 表示电容对电流的阻碍作用越小, 即信号越容易通过电容元件; 反之, 频率越低, 容抗也就越大。对直流电来说, 频率  $f=0$ , 容抗也就趋于 $\infty$ , 电容元件在直流电路中相当于开路。因此, 电容元件具有“通交流、隔直流”或“通高频、阻低频”的特性。利用这一特性, 电容在电子电路中可起到隔直、旁路、滤波等作用。

2) 相位关系

电流与电压初相的关系为

$$\varphi_i = \varphi_u + 90^\circ \quad (3.3.20)$$

即在关联参考方向下, 电容元件上电流较电压超前  $90^\circ$ , 或者说电压滞后电流  $90^\circ$ 。电容元件上电流和电压的波形关系如图 3.3.10 所示(波形图中  $\varphi_u = 90^\circ, \varphi_i = 90^\circ$ )。

## 2. 相量形式的伏安特性

用有效值相量形式表示电压和电流关系为

$$\dot{U} = U e^{j0^\circ}$$