



学习目标

掌握静力学的基本概念、静力学公理和推论的内容及适用范围；
学会分析物系内每个物体的受力情况，注意作用力与反作用力公理的应用；
理解力系和力偶系等相关定理，掌握力系的平衡条件及其应用；
掌握零件平衡问题的求解方法，学会对空间力系复杂平衡问题进行分析。

任务一 刚体的受力分析



任务描述

如图 1-1 所示，多跨梁 ABC 由 ADB 和 BC 两个简单的梁组合而成，受集中力 F 及均布载荷 q 作用，试画出整体及梁 ADB 和 BC 段的受力图。

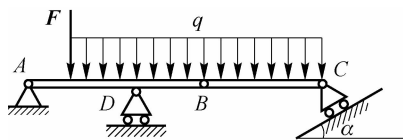


图 1-1 多跨梁受力分析



任务分析

了解静力学基本概念及常见的约束，分析物系内每个物体的受力情况。



知识准备

静力学是研究物体在平衡力系作用下受力规律的学科。静力学理论从生产实践中发展

而来,是机械零件或机构承载问题的计算基础,在工程技术中有着广泛的应用。

本任务重点研究处于静止或匀速直线运动状态的刚体和刚体系统所受外力的平衡规律。为了正确分析物体的受力情况,先介绍静力学的一些基本概念和公理,然后介绍工程中常见的几种典型约束及其约束力,最后重点讲解刚体受力分析和画受力图的方法。

一、静力学的基本概念

1. 刚体

物体在力的作用下,内部任意两点之间的距离都保持不变,即不发生变形,这样的物体称为刚体。刚体是一个理想化的力学模型,不应该把概念绝对化。通常在静力学中研究的是平衡问题时,将受力的物体假想为刚体,但在研究力所产生的变形效果时,不得将物体视为刚体。静力学研究的对象仅限于刚体,故又称为刚体静力学。

2. 质点

静力学中根据问题的不同,除了将实际物体抽象为刚体外,还可以将物体抽象为另外一种理想模型,即质点。质点是指只有质量而不存在体积与形状的点。物体的大小和形状不起作用,或者所起的作用并不显著而可以忽略不计时,可近似地把该物体看作是一个具有质量但大小和形状可以忽略不计的理想物体,即将该物体简化为质点。

3. 力

力是物体间相互的机械作用,这种作用使物体的运动状态发生变化,或者使物体产生变形。前者称为力的外效应,后者称为力的内效应。静力学主要研究物体的外效应。

力的作用效果取决于力的三要素,即力的大小、力的方向和力的作用点。

物体间相互机械作用的强度通过力的大小度量,在国际单位制(SI)中,力的单位是牛顿或千牛顿,其代号为 N 或 kN。

力是矢量,在几何上可以用一个矢量图形表示一个力,如图 1-2 所示,矢量的长度表示力的大小,矢量的起点或终点表示力的作用点,矢量的箭头表示力的方向。

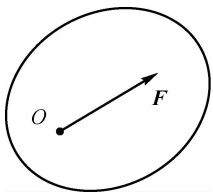


图 1-2 力的矢量图形

4. 力系

力系是指作用于物体上的多个力。力系中力的作用形式是千变万化的,可能是两个力,也可能是多个力,力的作用线可能在同一平面内,也可能在三维空间内。所有力的作用线在同一平面内的力系称为平面力系。所有力的作用线不在同一平面内的力系称为空间力系。若两个力或力系分别作用在同一个物体上,其效应完全相同,则称这两个力或力系为等效力或等效力系。如果一个力与一个力系等效,则称此力为该力系的合力,该力系中各力称为其合力的分力或分量,求合力的过程称为力系的合成。

5. 平衡

平衡是指物体相对于惯性参考系保持静止或匀速直线运动的状态。在一般的工程技术问题中,通常取地球作为惯性参考系。使物体处于平衡状态的力系称为平衡力系。研究物体的平衡问题,就是研究物体在各种力系作用下的平衡条件,并应用这些平衡条件解决工程技术问题。用一个简单的等效力系或一个力代替一个复杂力系的过程称为力系的简化。静力学主要研究三个问题:力系的简化,物体的受力分析,力系的平衡条件及其应用。

二、静力学公理

刚体的静力平衡问题是以静力学基本公理为前提的,静力学公理是人们经过长期实践总结的客观规律。静力学公理是对力的基本性质的概括和总结,是静力学全部理论的基础,是解决力系的简化、平衡条件以及物体受力分析等问题的关键。

1. 二力平衡公理

作用在刚体上的两个力使刚体处于平衡状态的必要和充分条件:两个力的大小相等,方向相反,作用在同一直线上,如图 1-3 所示,即

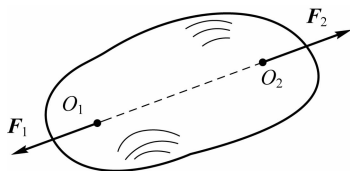


图 1-3 二力平衡

$$F_1 = -F_2 \quad (1-1)$$

注意

二力平衡公理只适用于刚体,而不适应于变形体。例如,软绳受两个等值反向的拉力作用可以平衡,而受两个等值反向的压力作用就不能平衡。

工程上将只受到两个力作用处于平衡状态的构件称为二力构件。如图 1-4 所示,直杆 AB 和曲杆 AC 就是二力构件。需要强调的是,找出二力构件对于刚体,特别是刚体系统的静力学分析是非常重要的。

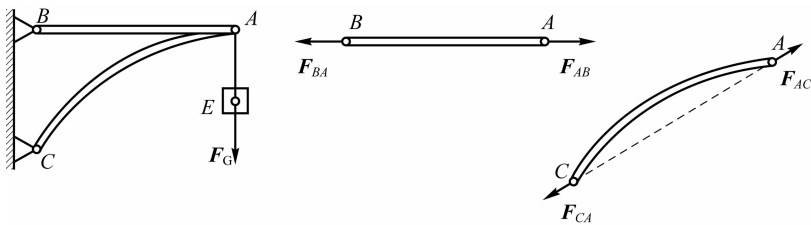


图 1-4 二力构件

2. 加减平衡力系公理

在作用于刚体的任意力系上加上或减去任意平衡力系,并不改变原力系对刚体的作用效果。加减平衡力系原理也只适用于刚体,而不能用于变形体。

推论 1 力的可传性

作用于刚体上某点的力,可以沿着它的作用线移到刚体内任意一点,并不改变该力对刚

体的作用。

证明:设在刚体上 O_1 点有作用力 F ,如图 1-5(a)所示。根据加减平衡力系公理,可在力的作用线上任取一点 O_2 ,并加上两个相互平衡的力 F_1 和 F_2 ,使 $F_2 = -F_1 = F$,如图 1-5(b)所示。由于力 F 和 F_1 也是一个平衡力系,故可除去,这样只剩下一个力 F_2 ,如图 1-5(c)所示。原来的这个力 F 与力系 (F, F_1, F_2) 以及力 F_2 互等,力 F_2 就是原来的力 F ,只是作用点已移到了点 O_2 。

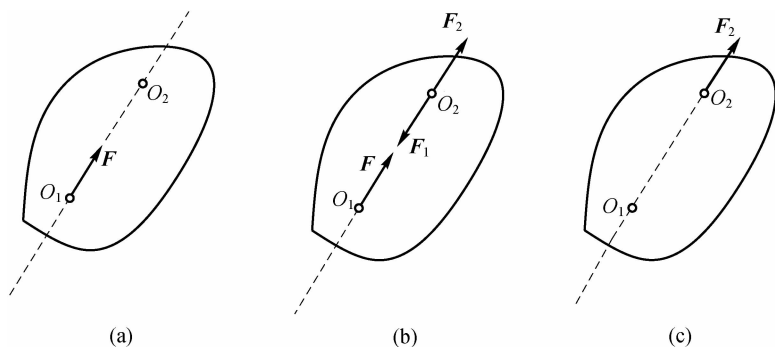


图 1-5 力的可传性

由此可见,对于刚体来说,力的作用点已不是决定力的作用效果的要素,它被作用线所代替。因此,作用于刚体上的力的三要素是力的大小、方向和作用线。



注意

力的可传性原理只适用于刚体,而且力只能在刚体自身上沿其作用线移动,不能移到其他刚体上去。

推论 2 三力平衡汇交定理

刚体在三个力的作用下平衡,若其中两个力的作用线相交,则第三个力的作用线必过该交点,且三力共面。

证明:如图 1-6 所示,刚体上 A 、 B 、 C 三点上的作用力分别为 F_1 、 F_2 和 F_3 ,其中 F_1 与 F_2 的作用线相交于 O 点,刚体在此三力作用下处于平衡状态。根据力的可传性原理,将力 F_1 和 F_2 合成得合力 F_{12} ,则力 F_3 应与 F_{12} 平衡,因而 F_3 必与 F_{12} 共线,即 F_3 作用线也通过 O 点。另外,因为 F_1 、 F_2 与 F_{12} 共面,所以 F_1 、 F_2 与 F_3 也共面。该定理得证。

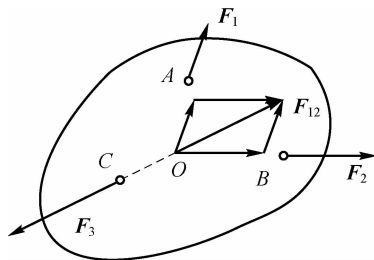


图 1-6 三力平衡汇交

利用三力平衡汇交定理可以确定刚体在三力作用下平衡时未知力的方向。

3. 力的平行四边形法则

作用于物体上同一点的两个力可以合成为一个合力。其合力仍作用于该点上,合力的大小和方向由以这两个力为邻边所构成的平行四边形的对角线来确定。

如图 1-7(a)所示, F_1 、 F_2 为作用于 O 点的两个力,以这两个力为邻边作出平行四边形 $OACB$,则对角线 OC 即为 F_1 与 F_2 的合力 F_R ,或者说合力矢 F_R 等于原力矢 F_1 与 F_2 的量和,即

$$F_R = F_1 + F_2 \quad (1-2)$$

合力的大小可由余弦定理求出,即

$$F_R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \alpha} \quad (1-3)$$

式中, α 为 F_1 与 F_2 的夹角($^\circ$)。

实际上,根据平行四边形的性质,确定作用于一点的两个力的合力时,并没有必要作一个平行四边形,只要不改变这两个力的大小和方向,将它们首尾相接,则合力始于它们的起点,而止于它们的终点,如图 1-7(b)所示,这种求合力的方法称为力的三角形法则。

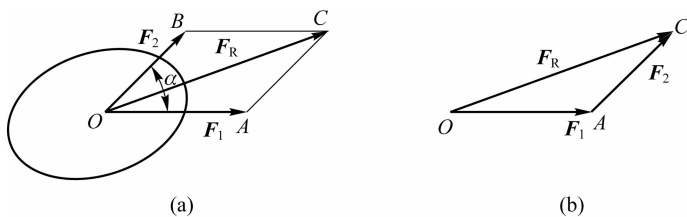


图 1-7 力的合成

利用力的平行四边形法则也可将一个力分解成作用于同一点的两个分力。一个力可以沿任意两个方向分解。在工程问题中常将力沿互相垂直的两个方向分解,这种分解称为正交分解。

4. 作用与反作用公理

一个物体受到其他物体作用时,施力物体一定也受到与受力物体等值反向的力的作用,这两个力就是一对作用力和反作用力。两物体间的作用力与反作用力总是同时存在,且两者大小相等、方向相反、沿同一直线,分别作用在相互作用的两个物体上。

作用力与反作用力是分别作用在两个物体上的力,因此不能将它们看作平衡力系而互相抵消,如图 1-8 所示。

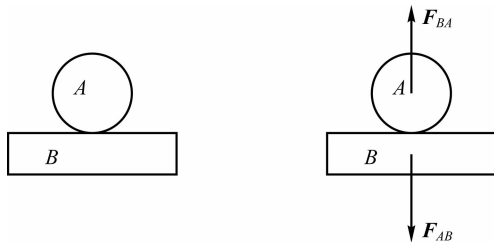


图 1-8 作用力与反作用力

三、工程中常见的约束

如果物体在空间沿任何方向的运动都不受限制,则该物体为自由体。如飞行的飞机和火箭等。在日常生活和工程中,有些物体通常总是以各种形式与周围的物体互相联系并受到周围物体的限制而不能做任意运动,这类物体为非自由体。如受到轴承限制的转轴、卧式车床中受床身导轨限制的刀架及受到吊绳限制的悬挂的重物等。

约束是指运动物体的几何位置所受到的限制。物体受到外力作用会产生运动或具有运动趋势,一旦这种运动或运动趋势被限制,该物体就会对限制其运动的限制物产生作用力,根据作用与反作用公理,限制物也必然会对该物体产生等值反向的作用力,这类作用力称为约束力。约束力来自于约束,它的作用取决于主动力的作用情况和约束的形式,又因为它对物体的运动起限制作用,因而约束力的方向必定与该约束阻碍的运动方向相反。应用这个准则,在受力分析中可以确定约束力的方向或作用线的位置。约束力的大小总是未知的,在静力学中如果约束力和物体受的其他已知力构成平衡力系,可通过平衡条件来求解未知力的大小。

下面介绍工程中常见的几种约束类型及确定约束力的方法。

1. 光滑接触面约束

两个互相接触的物体,如果略去接触面间的摩擦就可以认为相互间的约束是光滑接触面约束。这类约束不能限制物体沿接触面切线方向的运动,只能限制物体沿接触面法线方向的运动,并且只能限制受压不能限制受拉,因此光滑接触面约束对物体的约束力作用在接触点处,作用线沿接触面法线方向指向物体,通常用 N 表示。

如图 1-9 所示, N 即为曲面 A 对小球的约束力,又如如图 1-10 所示,平面对小球的约束力为 N 。

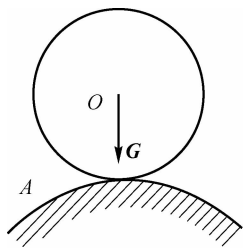


图 1-9 曲面光滑接触面约束

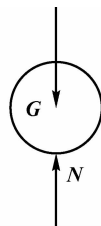
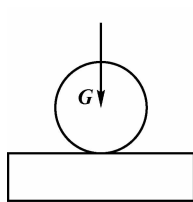
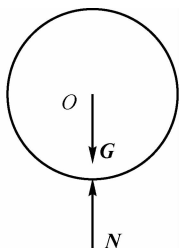


图 1-10 平面光滑接触面约束

2. 柔性约束

由柔软的绳索、链条和皮带等构成的约束统称为柔性约束。这类约束的特点:柔软易变形,不能抵抗弯曲,只能受拉不能受压,并且只能限制物体沿约束伸长方向的运动,而不能限制其他方向的运动。因此柔性约束的约束力只能是拉力,作用在与物体的连接点上,作用方向沿着绳索背离物体。如图 1-11 所示, F_s 即为绳索给球的约束力。

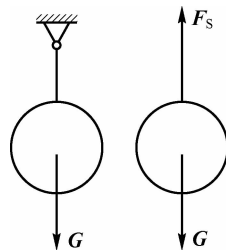


图 1-11 柔性约束

3. 光滑圆柱铰链约束

在两个构件上各自有直径相同的圆孔,用圆柱销将它们连接起来,就构成了光滑圆柱铰链约束,如图 1-12(a)所示。这种铰链只能限制物体间的相对径向移动,不能限制物体绕圆柱销轴线的转动和平行于圆柱销轴线的移动。由于圆柱销与圆柱孔是光滑曲面接触,则约束力应沿在接触线上的一点与圆柱销中心的连线上,垂直于轴线,如图 1-12(b)所示。因为接触线的位置不能预先确定,因而约束力的方向也不能预先确定。通常把它分解为 x 轴方向和 y 轴方向的两个相互垂直的约束力,用 F_x 和 F_y 表示,如图 1-12(c)所示。如果其中一个构件固定,比如与地基固定连接或者与机座或其他机构固定在一起,此类光滑圆柱铰链约束为固定铰支座约束,如图 1-12(d)所示。

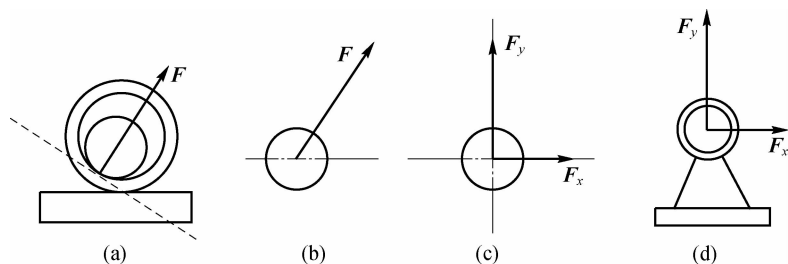


图 1-12 光滑圆柱铰链约束



视频
光滑铰链约束

4. 活动铰链支座约束

如果在固定铰链支座的底部安装一排滚轮,如图 1-13(a)所示,就可使支座沿固定支承面移动,称为活动铰链支座。这种支座常用于桥梁、屋架等结构中,可以避免由温度变化而引起结构内部变形应力。在不计摩擦的情况下,活动铰链支座只能限制构件沿支承面垂直方向的移动。因此活动铰链支座的约束力方向必垂直于支承面,且通过铰链中心,如图 1-13(b)所示。

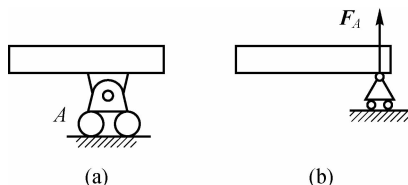


图 1-13 活动铰链支座约束

5. 固定约束

如图 1-14 所示,构件 AB 的 A 端被固定住,此时该构件既不能移动也不能转动,因此它将受到沿其移动趋势反方向的约束力以及与其转动趋势反方向的约束力矩。如果仅仅考虑平面范围内的约束力,由于约束力方向不确定,可将其分解为相互垂直的两个分力。

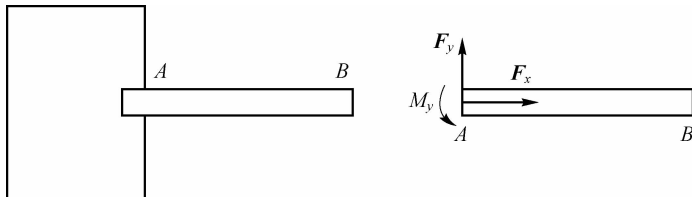


图 1-14 固定约束

6. 链杆约束

两端用光滑铰链与其他构件连接且不考虑自重的刚性杆称为链杆,链杆是二力杆,如图 1-15 所示。二力杆约束力的作用线一定是沿着链杆两端铰链的连线。若力的方向不能确定,通常可先假设,求解后通过力的正负再具体确定力的实际方向。

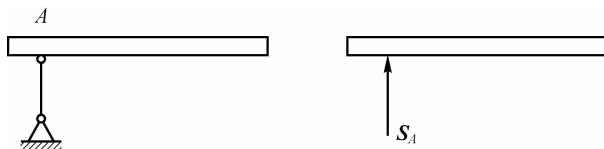


图 1-15 链杆约束

四、物体的受力分析

解决工程实际问题时,通常要利用平衡条件根据已知力求解未知力。因此,首先要确定物体受到哪些力的作用,并且分析出每个力的作用位置和方向,这个分析过程称为物体的受力分析。

对研究对象进行分析,就是把研究对象从与它联系的周围的物体中分离出来,这种解除了约束的自由体称为分离体。在研究对象的简图上画出作用在其上的全部主动力和约束力,这种表示物体受力状态的图形称为受力图。

在静力学中,恰当地选取研究对象,正确画出物体受力图是解决问题的关键。具体分析可通过以下几个步骤进行。

- (1) 选取研究对象,取分离体,并画出其简图。
- (2) 画出作用在研究对象上的所有主动力,并标注力的符号。
- (3) 根据与受力物体相连接或接触的物体画出约束力,并标注力的符号。
- (4) 检查受力图中受力分析有无“多”“漏”“错”的现象。

下面举例说明受力图的画法。

例 1-1 设小球重量为 G ,在 A 处用绳索系在墙上,如图 1-16(a)所示,试画出小球的受力图。

解: (1) 取小球作为分离体,并画出其简图。

(2) 画主动力。小球重力 G ,方向垂直向下,作用点在小球质心 O 。

(3) 画约束力。绳索的反作用力 T_A ,作用于 A 点。小球在 B 处为光滑表面接触,故在 B 处受墙面的法向力 N_B 的作用,方向垂直墙面并指向小球中心,如图 1-16(b)所示。

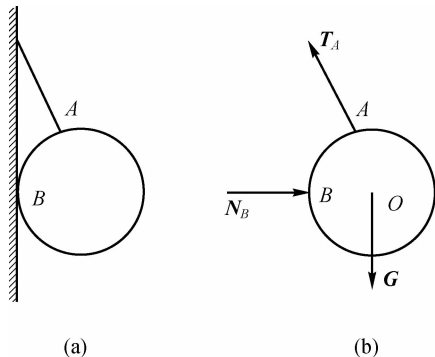


图 1-16 小球受力分析

例 1-2 水平梁 AB 左端为固定铰支座,右端为活动铰支座,如图 1-17(a)所示,假设不计构件的重量, C 处作用一主动力 F ,试画出其受力图。

解:(1)取水平梁 AB 为分离体,并画出其简图。

(2)画主动力。已知主动力 F ,作用点在 C 。

(3)画约束力。 A 端为固定铰支座,由于约束力方向未定,可用水平方向 F_{Ax} 和垂直方向 F_{Ay} 代替, B 端为活动铰支座,有一个垂直方向的约束力 F_{NB} ,如图 1-17(b)所示。根据三力平衡汇交定理, A 处两个约束力的合力为 F_A ,其作用线与主动力 F 和约束力 F_{NB} 的作用线相交于同一点,如图 1-17(c)所示。

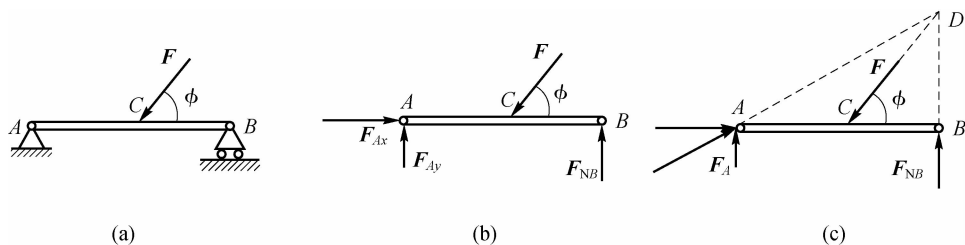


图 1-17 水平梁受力分析

例 1-3 如图 1-18(a)所示的三铰拱桥由左右两拱铰接而成。设各拱自重不计,在拱 AC 上作用载荷 P 。试分别画出拱 AC 和拱 CB 的受力图。

解:(1)先取拱 CB 为分离体。由于拱 CB 自重不计,且只在 B 、 C 两处受到铰链的约束,因此拱 CB 为二力构件。在铰链中心 B 、 C 处分别受 S_B 、 S_C 两力的作用,且 $S_B = S_C$,如图 1-18(b)所示。

(2)取拱 AC 为分离体。由于自重不计,因此主动力只有载荷 P 。拱在铰链 C 处受拱 BC 给它的约束力 S'_C 的作用,根据作用和反作用公理, $S'_C = S_C$ 。拱在 A 处受固定铰支座给它的约束力 N_A 的作用,由于方向未定,可用两个大小未知的正交分力 X_A 和 Y_A 代替。拱 AC 的受力图如图 1-18(c)所示。进一步分析可知,由于拱 AC 在 P 、 S'_C 和 N_A 三个力作用下平衡,故可根据三力平衡汇交定理,确定铰链 A 处约束力 N_A 的方向,如图 1-18(d)所示。

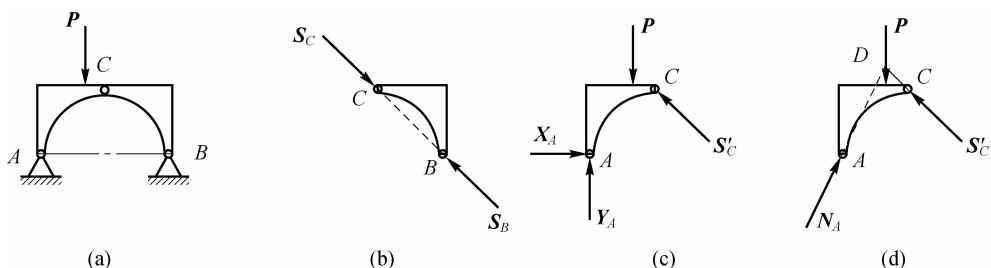


图 1-18 三铰拱桥受力分析



任务实施

刚体的受力分析——画出如图 1-19(a)所示多跨梁的受力图。

解:(1)取整体为研究对象。先画集中力 F 与分布载荷 q ,再画约束力。A 处约束力分解为两正交分量,D、C 处的约束力分别与其支承面垂直,B 处约束力为内力,不能画出,整体的受力图如图 1-19(b)所示。

(2)取 ADB 段的分离体。先画集中力 F 及分布载荷 q ,再画 A、D、B 处的约束力 F_{Ax} 、 F_{Ay} 、 F_D 、 F_{Bx} 、 F_{By} ,ADB 梁受力如图 1-19(c)所示。

(3)取 BC 段的分离体。先画分布载荷 q ,再画出 B、C 处的约束力,注意 B 处的约束力与 AB 段 B 处的约束力是作用力与反作用力关系,C 处的约束力 F_C 与斜面垂直,BC 梁受力如图 1-19(d)所示。

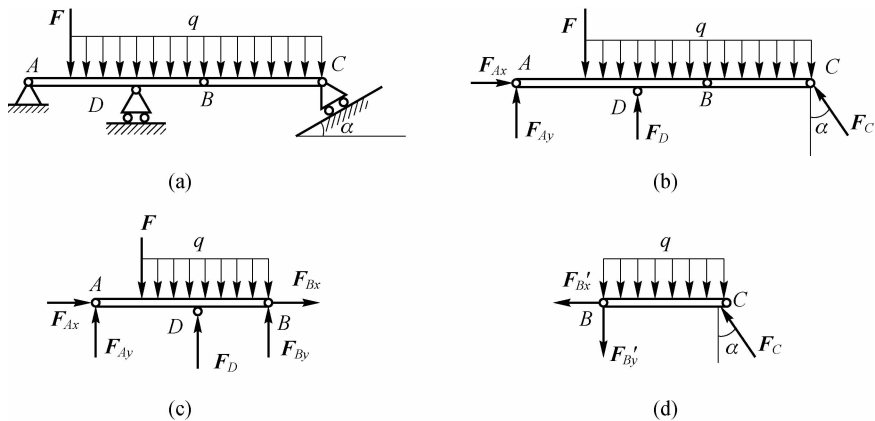


图 1-19 多跨梁受力分析

画受力图时需注意以下几点。

(1)选好研究对象。根据解题的需要,可以取单个物体或整个系统为研究对象,也可以取由几个物体组成的子系统为研究对象。

(2)确定研究对象所受力的数目。既不能少画一个力,也不能多画。力是物体间相互的机械作用,因此受力图上每个力都要明确它是哪一个施力物体作用的,不能凭空想象。

(3)一定要按照约束的性质画约束力。当一个物体同时受到几个约束的作用时,应分别根据每个约束单独作用情况,由该约束本身的性质来确定约束力的方向,绝不能按照自己的想象画约束力。

(4)受力图上要标明各力的名称及其作用点的位置,不要任意移动力的作用位置。

(5)一般情况下,不要将力分解或合成。如果需要分解或合成,分力与合力不要同时画在同一受力图上,以免重复。必要时用虚线表示分力与合力中的一种。

(6)画受力图时,要注意应用二力平衡公理、三力平衡汇交定理及作用与反作用公理。



思考与练习

一、简答题

1. 力的三要素是什么？两个力使刚体平衡的条件是什么？
2. 为什么说二力平衡公理、加减平衡力系公理和力的可传性都只适用于刚体？
3. 什么是二力构件？分析二力构件受力时与构件的形状有无关系？
4. 二力平衡公理和作用与反作用公理都涉及二力等值、反向、共线，二者有什么区别？
5. 确定约束力方向的原则是什么？活动铰链支座约束有什么特点？
6. 如图 1-20 所示，已知作用于物体上的两个力 F_1 与 F_2 ，满足大小相等、方向相反、作用线相同的条件，物体是否平衡？

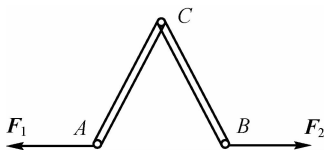


图 1-20 二力平衡分析

二、分析计算题

1. 试画出图 1-21 各图中物体 A 或构件 AB 的受力图(未画重力的物体重量不计，所有接触均为光滑接触)。

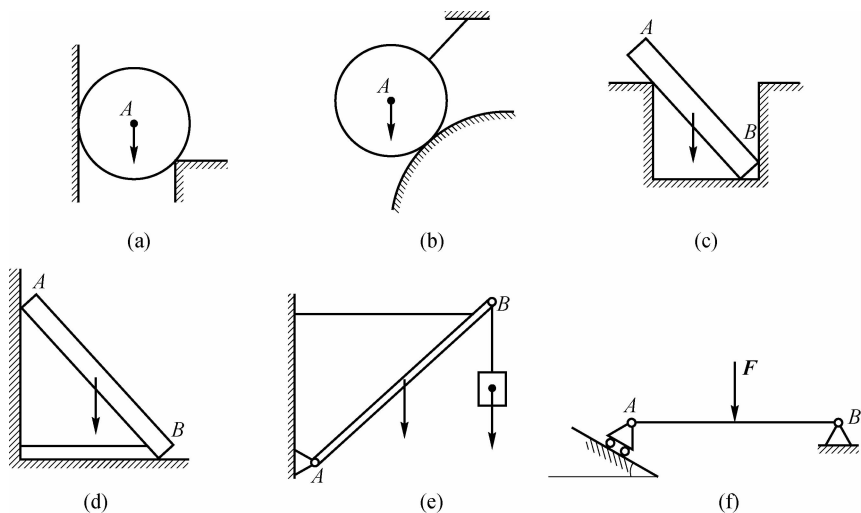


图 1-21 构件受力分析

2. 画出如图 1-22 所示机构中各杆件的受力图与系统整体的受力图(图中未画重力的各杆件的自重不计，所有接触均为光滑接触)。

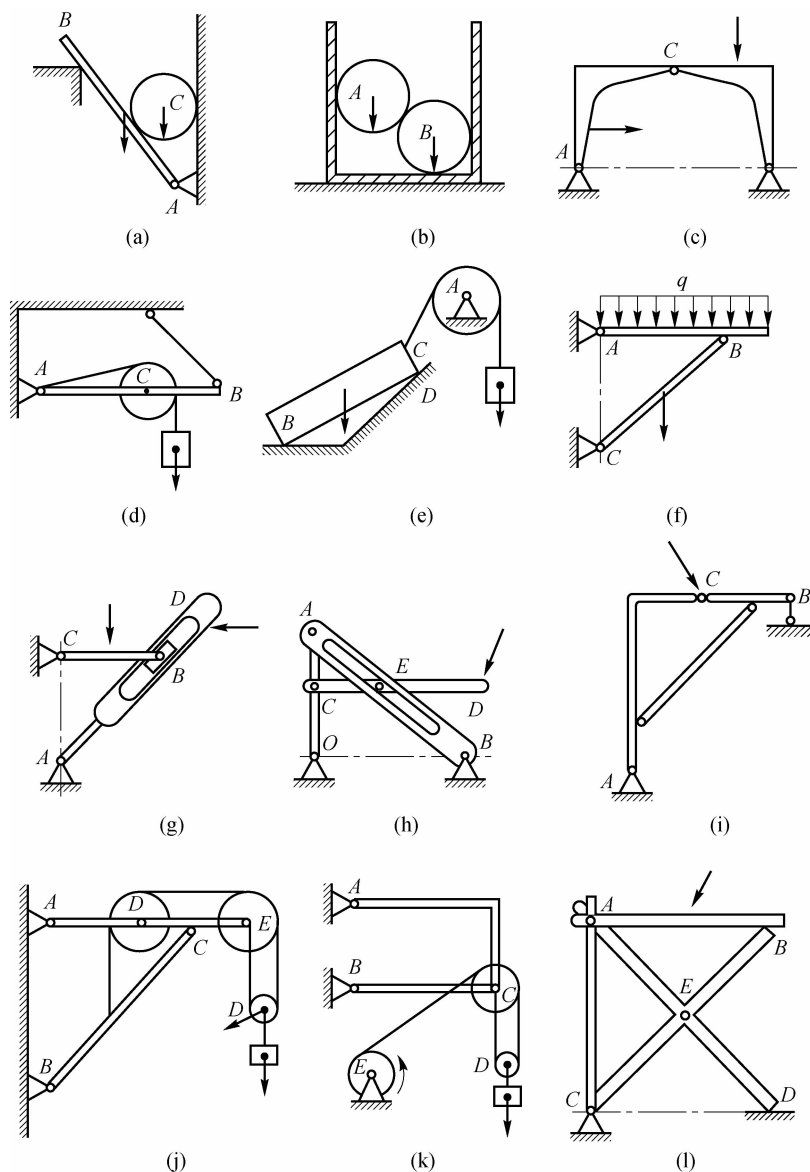


图 1-22 杆件受力分析

任务二 平面汇交力系平衡问题的求解



任务描述

简易起重装置如图 1-23 所示,重物用钢丝绳挂在支架的滑轮 B 上,钢丝绳的另一端缠绕在绞车 C 上。杆 AB 与杆 BD 铰接,并以铰链 A 、 D 与墙连接。设重物重力 $G=50\text{ kN}$,两杆和滑轮的自重不计,并忽略摩擦和滑轮的大小,试求平衡时杆 AB 和杆 BD 所受的力。

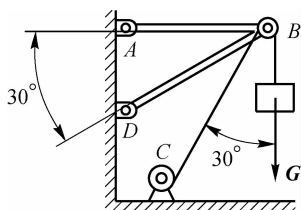


图 1-23 简易起重装置受力分析



任务分析

了解力在平面直角坐标系中的投影,学习平面汇交力系的合成与平衡的分析方法。



知识准备

根据力的作用线位置不同,可将力系分为平面力系和空间力系两大类。作用于物体上的各力作用线位于同一平面内的力系称为平面力系,否则称为空间力系。作用于物体上的各力作用线位于同一平面内,且汇交于一点的力系称为平面汇交力系。静力学主要研究力系的合成与平衡问题。本任务将分别用几何法与解析法研究平面汇交力系的合成与平衡问题。

一、力在平面直角坐标系中的投影

1. 力在平面直角坐标系中的投影分解

在工程实际中经常会遇到要把一个力沿两个已知方向分解,求这两个分力大小的问题。

如图 1-24(a)所示,设在平面直角坐标系 xOy 内有一已知力 F ,从力 F 的两端 A 和 B 分别向 x 、 y 轴作垂线,其中 ab 为力 F 在 x 轴上的投影, $a'b'$ 为力 F 在 y 轴上的投影。规定当力的始端到末端投影的方向与坐标轴的正向相同时,投影为正,反之为负。图 1-24(a)中力的投影均为正值,图 1-24(b)中力的投影均为负值。力在坐标轴上的投影是代数量。

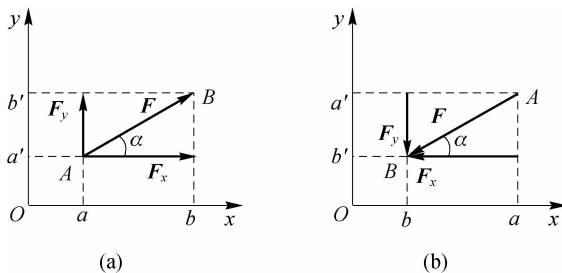


图 1-24 力在直角坐标系中的投影

将力 F 沿 x 、 y 坐标轴分解,所得分力 F_x 、 F_y ,其值与力 F 在相应坐标轴的投影值相等,其大小可用三角函数公式计算,设力 F 与 x 轴的正向夹角为 α ,则图 1-24(a)中的分力为

$$F_x = F \cos \alpha \quad (1-4)$$

$$F_y = F \sin \alpha \quad (1-5)$$

图 1-24(b)的分力为

$$F_x = -F \cos \alpha \quad (1-6)$$

$$F_y = -F \sin \alpha \quad (1-7)$$



注意

力的投影与力的分量是两个不同的概念。力的投影是代数量,而力的分量是矢量。只是在直角坐标系中,两者大小相等,投影的正负号表明分力的指向。

2. 合力投影定理

合力投影定理建立了合力的投影与分力的投影之间的关系。如图 1-25(a)所示为三个力 F_1 、 F_2 、 F_3 组成的平面汇交力系,如图 1-25(b)所示为平面汇交力系的各力矢 F_1 、 F_2 、 F_3 组成的力多边形, R 为合力矢。将力多边形中各力矢投影到 x 轴上,由图可见

$$ac = ab + bd - cd$$

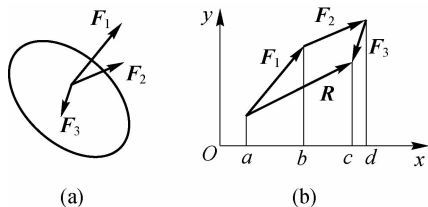


图 1-25 合力投影

根据投影定义,上式左端为合力的投影,右端为三个分力投影的代数和,即 $R_x = ac = F_{x1} + F_{x2} + F_{x3}$ 。显然,上式可推广到任意多个力的情况,即

$$R_x = F_{x1} + F_{x2} + \cdots + F_{xn} = \sum_{i=1}^n F_{xi} \quad (1-8)$$

同理

$$R_y = F_{y1} + F_{y2} + \cdots + F_{yn} = \sum_{i=1}^n F_{yi} \quad (1-9)$$

由此得出合力投影定理:力系合力在同一坐标轴上的投影,等于所有分力在同一坐标轴上投影的代数和。

二、平面汇交力系的合成与平衡

1. 平面汇交力系合成的几何法

1) 两个汇交力的合成

如图 1-26(a)所示,作用在物体上的任意两个不平行的力 F_1 和 F_2 ,根据力的可传性,可将这两个力分别沿其作用线移到汇交点,即成为作用在物体上同一点的两个汇交力。如图 1-26(b)所示,根据力的平行四边形法则可确定合力 R 的作用线通过汇交点,用矢量式表示为

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 \quad (1-10)$$

利用力的三角形法则也可确定合力 R 的大小和方向,如图 1-26(c)所示。但必须注意力的三角形的矢序规则,分力矢 F_1 和 F_2 沿环绕三角形边界的某一方向首尾相接,而合力 R

则从起点指向最后一个分力矢的末端。作图时若更换分力矢 F_1 和 F_2 的顺序, 则得到不同的力三角形, 但合力矢的大小和方向不变。

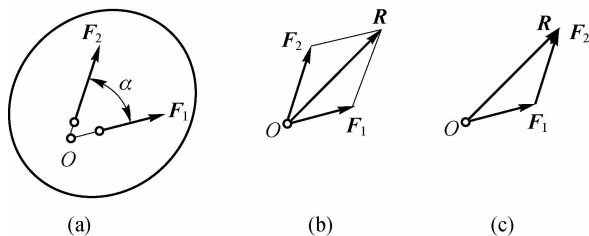


图 1-26 两个汇交力

2) 任意多个汇交力的合成

如图 1-27(a) 所示, 设物体受到平面汇交力系 F_1 、 F_2 、 F_3 、 F_4 的作用。求此力系的合力时, 可连续使用力的三角形法则。如先求 F_1 和 F_2 的合力 R_1 , 再求 R_1 和 F_3 的合力 R_2 , 最后将 R_2 与 F_4 合成, 即得力系的合力 R , 如图 1-27(b) 所示。

由作图的结果可以看出, 在求合力 R 时, 表示 R_1 和 R_2 的线段完全可以不画。可将各力 F_1 、 F_2 、 F_3 、 F_4 依次首尾相接, 形成一条折线, 连接其封闭边, 即从 F_1 的始端指向 F_4 的末端所形成的矢量则表示合力的大小和方向, 如图 1-27(c) 所示, 此法称为力的多边形法则。

上述矢量加法, 推广到 n 个力的汇交力系求合力, 可得出结论: 平面汇交力系的合力等于力系各力的矢量和, 合力的作用线通过汇交点。合力 R 可用矢量式表示为

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \cdots + \mathbf{F}_n = \sum \mathbf{F}_i \quad (1-11)$$

画力的多边形时, 若改变各分力相加的次序, 将得到形状不同的力的多边形, 但最后求得的合力不变, 如图 1-27(d) 所示为另一种分力相加的方式。

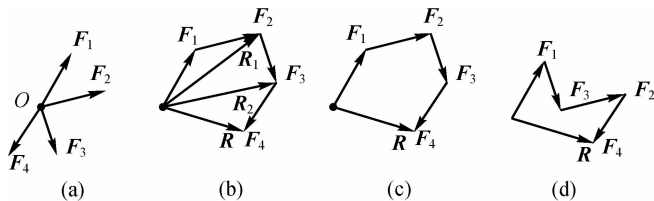


图 1-27 任意多个汇交力的合成

3) 平面汇交力系平衡的几何条件

作用在物体上的一个平面汇交力系可以合成一个合力。如果合力等于零, 此平面汇交力系为一个平衡力系, 物体处于平衡状态, 由此得出结论: 平面汇交力系平衡的条件是力系的合力等于零。以矢量式表示为

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = 0 \quad (1-12)$$

由几何作图可知, 如果平面汇交力系是一个平衡力系, 那么按力的多边形法则将力系中各力依次首尾相接所得到的折线, 一定是一个封闭的力多边形, 这就是平面汇交力系平衡的几何条件。

例 1-4 如图 1-28(a) 所示, 用一根长为 20 cm 的绳子将半径为 20 cm 的球体贴墙悬挂,

假设球重 200 N,求绳子的拉力和墙面对小球的约束力。

解:(1)选择研究对象。以小球为研究对象。

(2)受力和画受力图。小球共受到三个力的作用,即重力、绳子拉力和墙面的约束力,小球处于平衡状态,这三个力构成平面汇交力系,交点为球心 O ,如图 1-28(b)所示。

(3)根据平衡几何条件,求出未知力。因为球体平衡,三力组成一封闭力三角形,如图1-28(c)所示。由平衡几何关系求得

$$T = \frac{G}{\cos \alpha} = 230.94 \text{ N}$$

$$N = \frac{G}{\cot \alpha} = 115.47 \text{ N}$$

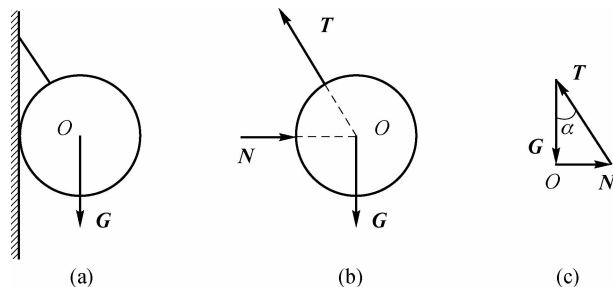


图 1-28 绳子的拉力和墙面对小球的约束力

例 1-5 如图 1-29(a)所示,平面刚架在 C 点受水平力 F 作用,已知力 $F=50 \text{ N}$,不计刚架的自重且刚架各边长度相等,试求 A 、 B 支点的约束力。

解:(1)选择研究对象。以平面刚架为研究对象。

(2)受力和画受力图。 B 为活动铰支座,故 B 点的约束力垂直向上,另刚架受到水平力 F 和 A 支点的约束力,根据三力平衡汇交定理,则固定铰支座 A 处的支座约束力和水平力 F 及 B 点的垂直向上约束力必汇交于点 D 处,画出它的受力图,如图 1-29(b)所示。

(3)由平衡几何条件求出未知力。当平面刚架平衡时,三力组成一封闭力三角形,如图 1-29(c)所示。由平衡几何关系求得

$$F_A = \frac{F}{\cos \alpha} = 70.71 \text{ N}$$

$$F_B = F \tan \alpha = 50.00 \text{ N}$$

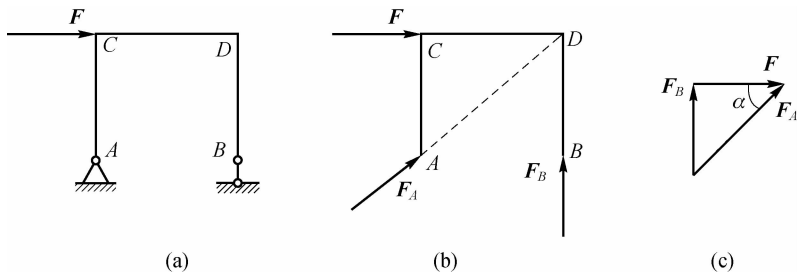


图 1-29 平面刚架约束力分析

画力的三角形时,如各力是按选定的作图比例尺画出,则可在力三角形中直接量出结果。在工程中,当结构的几何尺寸关系较复杂时,用作图法解题较为简便。

2. 平面汇交力系合成与平衡的解析法

1) 平面汇交力系平衡的解析条件

平面汇交力系的平衡条件是力系的合力等于零。合力的大小

$$R = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2} \quad (1-13)$$

当合力为零时,有

$$\sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2} = 0 \quad (1-14)$$

即

$$\sum F_x = 0, \sum F_y = 0 \quad (1-15)$$

由此可知,平面汇交力系平衡的必要和充分条件是力系中所有力在任选两个坐标轴上投影的代数和均为零。

式(1-15)是平面汇交力系的平衡解析条件,亦称平面汇交力系的平衡方程。由于平面汇交力系有两个独立的平衡方程,因此只能求解两个未知量,可以是力的大小,也可以是力的方向。

2) 平面汇交力系合成的解析法

解析法是通过力矢在坐标轴上的投影来分析力系的合成及其平衡条件的一种方法。

求平面汇交力系合力的解析法是用各力在直角坐标轴上的投影,计算合力的大小,确定合力的方向。

设在刚体上的点 O 作用了由 n 个力 F_1, F_2, \dots, F_n 组成的平面汇交力系,如图 1-30(a) 所示,求合力的大小和方向。

设 X_1 和 Y_1, X_2 和 Y_2, \dots, X_n 和 Y_n 分别表示力 F_1, F_2, \dots, F_n 在正交轴 Ox 和 Oy 上的投影。如图 1-30(b) 所示,根据合力投影定理,可求得合力 R 在这两轴上的投影,即

$$R_x = X_1 + X_2 + \dots + X_n = F_{x1} + F_{x2} + \dots + F_{xn} = \sum_{i=1}^n F_{xi}$$

$$R_y = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n = F_{y1} + F_{y2} + \dots + F_{yn} = \sum_{i=1}^n F_{yi}$$

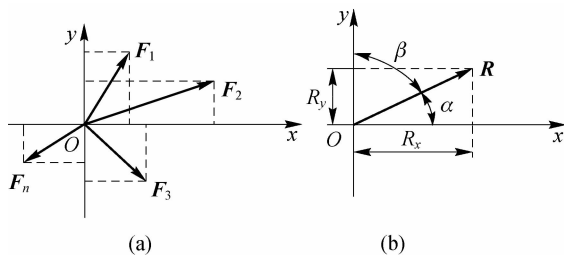


图 1-30 平面汇交力系合成

应用余弦定理,可求出合力的大小和方向,即

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(\sum_{i=1}^n F_{xi})^2 + (\sum_{i=1}^n F_{yi})^2} \quad (1-16)$$

$$\tan \alpha = \left| \frac{R_y}{R_x} \right| \quad (1-17)$$

式中, α 为合力 \mathbf{R} 与 x 轴间的夹角($^\circ$)。

应用平衡方程来解决工程上的平衡问题是静力学的主要内容之一。下面举例说明平面汇交力系平衡方程的应用。

例 1-6 支架 ABC 由横杆 AB 与支撑杆 BC 组成, 如图 1-31(a) 所示。 A 、 B 、 C 处均为铰连接, B 端悬挂重物, 其重力 $G=10\text{ N}$, 杆重不计, 试求两杆所受的力。

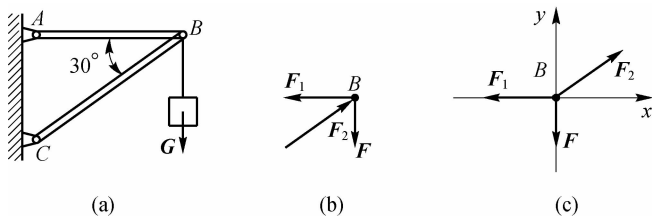


图 1-31 支架受力分析

解: (1) 选择研究对象, 以销 B 为研究对象。

(2) 受力和画受力图。由于 AB 、 BC 杆自重不计, 杆端为铰链, 故均为二力杆, 两端所受力的作用线必过直杆的轴线。根据作用力与反作用力的关系, 约束力 \mathbf{F}_1 、 \mathbf{F}_2 作用于 B 点, 此外, 绳子的拉力 \mathbf{F} (大小等于物体的重力) 也作用于 B 点, \mathbf{F}_1 、 \mathbf{F}_2 、 \mathbf{F} 组成的平面汇交力系及其受力图如图 1-31(b) 所示。

(3) 列平衡方程, 求出未知力。以点 B 为坐标原点, 建立直角坐标系, 如图 1-31(c) 所示, 根据合力投影定理, 可列平衡方程如下

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0, F_2 \cos 30^\circ - F_1 &= 0 \\ \sum F_y = 0, F_2 \sin 30^\circ - F &= 0 \end{aligned}$$

解得 $F_1=17.32\text{ N}$, $F_2=20\text{ N}$ 。

例 1-7 AB 杆的 A 端为固定铰支座约束, B 端为活动铰支座约束, 在杆的 C 处作用一集中力 $P=10\text{ N}$, $\alpha=45^\circ$, 杆的尺寸如图 1-32(a) 所示, 假设杆的自重忽略不计, 试求各支座的约束力。

解: (1) 取研究对象。先将 AB 杆分离出来, 作为研究对象。

(2) 受力和画受力图。 AB 杆受到主动力 \mathbf{P} 和活动铰支座 B 垂直向上的约束力 \mathbf{F}_B 以及固定铰支座 A 的约束力 \mathbf{F}_A 的作用, 利用三力平衡汇交定理可知约束力 \mathbf{F}_A 的作用线也通过 D 点, 如图 1-32(b) 所示。

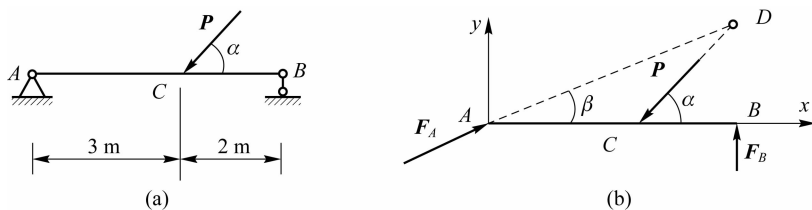


图 1-32 支座约束力

(3)列平衡方程,求出未知力。以 A 为原点建立坐标系,见图 1-32(b),列平衡方程如下:

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0, F_A \cos \beta - P \cos \alpha = 0 \\ \sum F_y &= 0, F_A \sin \beta - P \sin \alpha + F_B = 0\end{aligned}$$

由几何关系可得 $AD = \sqrt{5^2 + 2^2} \text{ m} = 5.39 \text{ m}$ 。

代入平衡方程得到 $F_A = 7.6 \text{ N}, F_B = 4.2 \text{ N}$ 。

计算结果为正,说明约束力的方向设定正确。



任务实施

平面汇交力系平衡问题的求解——分析图 1-33(a)中杆 AB 和杆 BD 的受力情况。

解:(1)取研究对象。由于 AB 、 BD 两杆都是二力杆,假设杆 AB 和杆 BD 均受拉力,如图 1-33(b)所示。为了求出这两个未知力,可通过求两杆对滑轮的约束力来解决。因此选取滑轮 B 为研究对象。

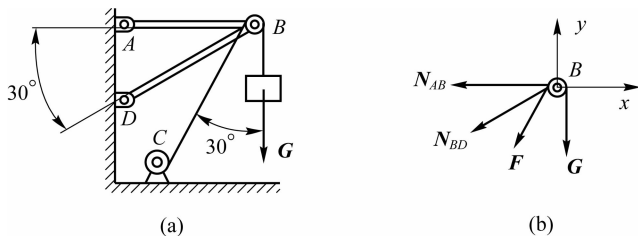


图 1-33 简易起重装置受力分析

(2)受力和画受力图。滑轮受到钢丝绳的拉力 F 和物重 G ,以及杆 AB 和 BD 对滑轮的约束力 N_{AB} 和 N_{BD} 的作用。由于滑轮的大小可忽略不计,故这些力可看作是汇交力系,见图 1-33(b)。

(3)列平衡方程,求出未知力。选取滑轮 B 为坐标原点,坐标轴见图 1-33(b)。为使每个未知力只在一个轴上有投影,在另一轴上的投影为零,坐标轴应尽量取在与未知力作用线相垂直的方向。根据合力投影定理,可列平衡方程如下

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0, -N_{AB} - N_{BD} \cos 30^\circ - F \sin 30^\circ = 0 \\ \sum F_y &= 0, -N_{BD} \sin 30^\circ - F \cos 30^\circ - G = 0\end{aligned}$$

解得 $N_{AB} = 136.6 \text{ kN}, N_{BD} = -186.6 \text{ kN}$ 。

所求结果 N_{AB} 为正值,表示该力的假设方向与实际方向相同,即杆 AB 受拉; N_{BD} 为负值,表示该力的假设方向与实际方向相反,即杆 BD 受压力。

通过以上例题,可以看出静力学分析方法在求解静力学平衡问题中的重要性,归纳出应用平面汇交力系平衡方程的主要步骤和注意事项如下。

(1)选择研究对象。选择研究对象时应注意:所选择的研究对象应作用有已知力(或已经求出的力)和未知力,这样才能应用平衡条件由已知力求得未知力;先以受力简单并能由已知力求得未知力的物体作为研究对象,然后再以受力较为复杂的物体作为研究对象。

(2)取分离体和画受力图。研究对象确定之后,进而需要分析受力情况,为此,需将研究

对象从其周围物体中分离出来。根据所受的外载荷画出分离体所受的主动动力,根据约束性质画出分离体上所受的约束力,最后得到研究对象的受力图。

(3)选取坐标系,计算力系中所有的力在坐标轴上的投影。坐标轴可以任意选择,但应尽量使坐标轴与未知力平行或垂直,可以使力的投影简化,同时使平衡方程中包括最少数目的未知量,避免解联立方程。

(4)列平衡方程,求解未知量。若求出的力为正值,则表示受力图上所设力的方向与实际方向相同;若求出的力为负值,则表示受力图上力的实际方向与所假设方向相反,在受力图上不必改正,在答案中要说明。



思考与练习

一、简答题

- 合力是否一定比分力大?为什么?
- 图 1-34 所示等边三角板 ABC ,边长为 a ,沿其边缘作用大小均为 P 的力,方向如图 1-34(a)所示。若三力的方向各改变成如图 1-34(b)所示,其合成结果是否相同?

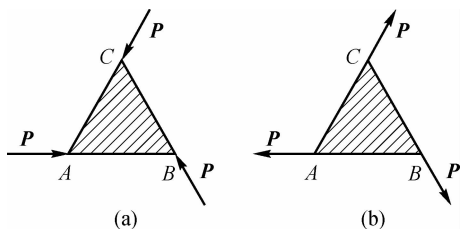


图 1-34 三角板受力合成

- 若两个力在同一轴坐标投影相等,则这两个力的大小是否相等?
- 力 F 沿轴 Ox 、 Oy 的分力和该力在两轴上的投影有何区别?
- 几何法与解析法求解平衡力系有何区别?什么情况下更适合用几何法?
- 用解析法求平面汇交力系的合力时,是否一定要应用直角坐标系?若取不同的直角坐标系,所得的合力是否相同?

二、分析计算题

- 如图 1-35 所示平面汇交力系,求该力系的合力。
- 如图 1-36 所示,一铰盘有三个等长的柄,长度为 1,其夹角均为 120° ,每个柄端各作用一垂直于柄的力 P 。试求该力系:
 - 向中心点 O 简化的结果。
 - 向 BC 、 AO 连线的交点 D 简化的结果。
 - 这两个结果说明什么?

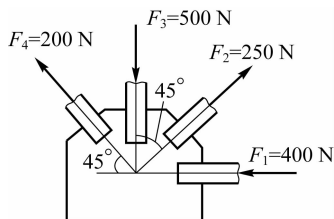


图 1-35 平面汇交力系

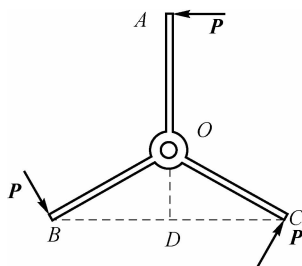


图 1-36 铰盘受力

3. 如图 1-37 所示,三铰门式刚架受集中荷载 P 作用,不计架重,求图示两种情况下支座 A 、 B 的约束力。

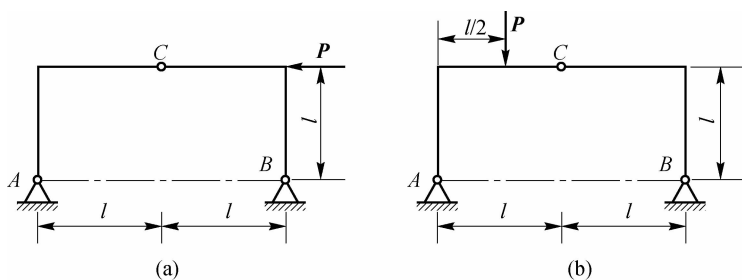


图 1-37 三铰门式刚架受力

4. 如图 1-38 所示简支梁受集中力 $P=50\text{ kN}$,求图示两种情况下支座 A 、 B 的约束力。

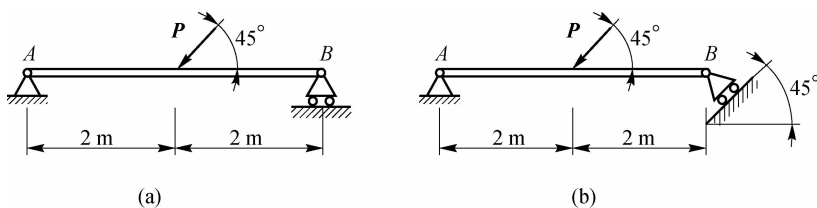


图 1-38 简支梁受力

5. 固定于墙内的环形螺钉上,作用有 3 个力 F_1 、 F_2 、 F_3 ,各力的方向如图 1-39 所示,各力的大小分别为: $F_1=3\text{ kN}$, $F_2=4\text{ kN}$, $F_3=5\text{ kN}$ 。试求螺钉作用在墙上的力。

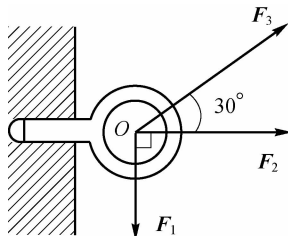


图 1-39 螺钉作用力

6. 如图 1-40 所示的构件由直角弯杆 EBC 以及直杆 AB 组成,不计各杆自重,已知 $q=10\text{ kN/m}$, $F=50\text{ kN}$, $M=6\text{ kN}\cdot\text{m}$,各尺寸如图所示。求固定端 A 处及支座 C 的约束力。

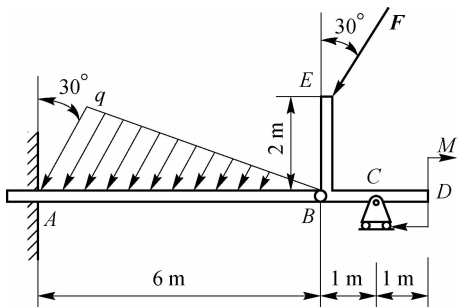


图 1-40 直角弯杆构件

7. 图 1-41 所示为一拔桩装置。在木桩的 A 点系一绳，将绳的另一端固定在 C 点，在绳的 B 点系另一绳，此绳的另一端固定在 E 点，在绳的 D 点用力向下拉，这时绳的 BD 段是水平的，AB 段是铅垂的，DE 段与水平线、CB 段与铅垂线所成夹角均为 145° 。如向拉力 $P=100\text{ N}$ ，求 AB 绳作用于桩上的拉力。

8. 如图 1-42 所示，两球 A 和 B 分别重 P 和 Q ，用长为 $2l$ 的杆连接，然后放在有光滑内表面的球形穴中，此球形穴的半径为 R 。如不计杆重，求物系平衡时在接触点 A 和 B 处的约束力和杆的内力以及杆与水平线的夹角。

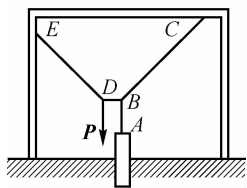


图 1-41 拔桩装置

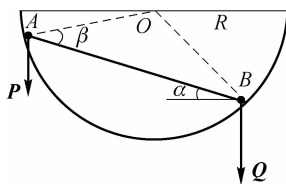


图 1-42 光滑内表面球形穴

9. 如图 1-43 所示液压夹紧机构中，D 为固定铰链，B、C、E 为活动铰链。已知力 F 与机构平衡时角度如图所示，求此时工件 H 所受的压紧力。

10. 如图 1-44 所示结构，各构件自重不计，尺寸如图所示，受两个等值、反向、共线的力 P 和 Q 作用。设 $P=Q=50\text{ N}$ ，求 A、B、C 三铰的约束力。

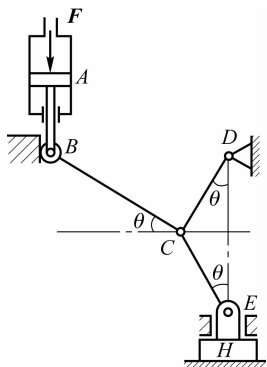


图 1-43 液压夹紧机构

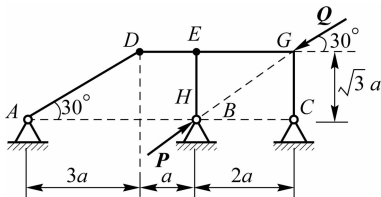


图 1-44 三铰的约束力

任务三 平面力偶系平衡问题的求解



任务描述

如图 1-45 所示机构的自重不计。圆轮上的销子 A 放在摇杆 BC 上的光滑导槽内。圆轮上作用一力偶,其力偶矩 $M_1 = 50 \text{ N} \cdot \text{m}$, $OA = r = 0.4 \text{ m}$ 。图示位置时 OA 与 OB 垂直, $\alpha = 30^\circ$,且系统平衡。求作用于摇杆 BC 上的力偶矩 M_2 及铰链 O、B 处的约束力。



任务分析

理解力偶和力偶矩的概念,明确力偶的性质和力偶的等效条件,能应用平衡条件求解力偶系的平衡问题。



知识准备

一、平面力对点之矩的概念及计算

力对物体的作用效应有以下两种情况。

- (1) 如果力的作用线通过物体的质心,将使物体在力的方向上平动。
 - (2) 如果力的作用线不通过物体的质心,物体将在力的作用下边平动边转动。
- 本任务将研究力对物体的转动作用。

1. 力对点之矩的概念

实践表明,作用在物体上的力除有平动效应外,有时还有转动效应。如图 1-46 所示,用扳手拧螺母,使螺母产生绕 O 点转动的效果,不仅与力 F 的大小有关,与 O 点至该力作用线的垂直距离 d 称为力臂。

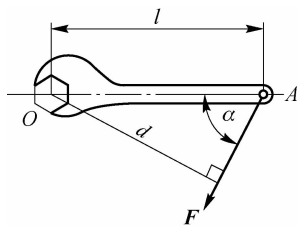


图 1-46 扳手拧螺母

力对点之矩是一个代数量,它的绝对值等于力的大小与力臂的乘积,力使物体绕矩心逆时针转动时为正,反之为负。用公式表示为

$$M_O(\mathbf{F}) = \pm Fd \quad (1-18)$$

由力矩的定义可以得出以下结论。

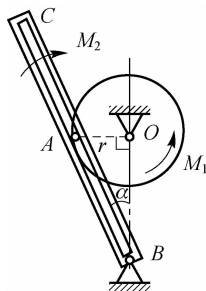


图 1-45 摇杆机构

(1) 力的大小为零, 则力矩为零。

(2) 力的作用线通过矩心, 即力臂为零时, 力矩为零。

(3) 力沿其作用线移动时, 因为力的大小、方向和力臂均没有改变, 所以力矩不变。

例 1-8 如图 1-47 所示, 刚架上作用力 $F=100\text{ N}$, 其角度 $\theta=60^\circ$, $a=6\text{ m}$, $b=4\text{ m}$ 。试分别计算力 F 对点 A 和 B 的力矩。

解: 力 F 可分解为水平方向的力 F_x 和竖直方向的力 F_y , 其中

$$F_x = F \cos 60^\circ = 50\text{ N}$$

$$F_y = F \sin 60^\circ = 86.6\text{ N}$$

根据式(1-18)得

$$M_A(\mathbf{F}) = -F_x b = -200\text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_B(\mathbf{F}) = -F_x b + F_y a = 319.6\text{ N} \cdot \text{m}$$

2. 合力矩定理

在计算力矩时, 有时直接计算比较困难。如果将力作适当分解, 计算各分力的力矩则很方便。利用合力矩定理, 可以建立合力对某点的矩与其分力对同一点的矩之间的关系。

平面汇交力系的合力对平面内任一点的矩, 等于力系中各分力对于该点力矩的代数和。即

$$M_O(\mathbf{R}) = M_O(\mathbf{F}_1) + M_O(\mathbf{F}_2) + \dots + M_O(\mathbf{F}_n)$$

或

$$M_O(\mathbf{R}) = \sum M_O(\mathbf{F}) \quad (1-19)$$

例 1-9 如图 1-48(a) 所示, 作用于齿轮的啮合力 $F_n=400\text{ N}$, 分度圆直径 $D=60\text{ mm}$, 压力角 $\alpha=20^\circ$, 求啮合力 F_n 对于轮心 O 之矩。

解法 1 按力矩定义求解。由图 1-48(a) 中几何关系可知力臂 $d = \frac{D}{2} \cos \alpha$, 则

$$M_O(\mathbf{F}_n) = -F_n d = -400 \times \frac{0.06}{2} \times \cos 20^\circ \text{ N} \cdot \text{m} \approx -11.28 \text{ N} \cdot \text{m}$$

解法 2 应用合力矩定理求解。将啮合力 F_n 正交分解为圆周力 F_t 和径向力 F_r , 见图 1-48(b), 可知分度圆半径是圆周力的力臂, 根据合力矩定理, 则

$$\begin{aligned} M_O(\mathbf{F}_n) &= M_O(\mathbf{F}_t) + M_O(\mathbf{F}_r) = -F_n \cos \alpha \frac{D}{2} + 0 = -400 \times \cos 20^\circ \times \frac{0.06}{2} \text{ N} \cdot \text{m} \\ &\approx -11.28 \text{ N} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

以上两种方法的计算结果相同。工程中齿轮的圆周力和径向力是分别给出的, 因此解法 2 用得较为普遍。

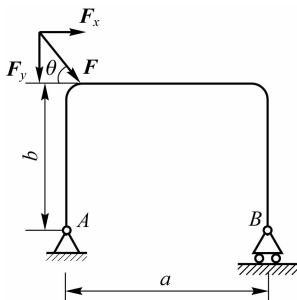


图 1-47 刚架受力

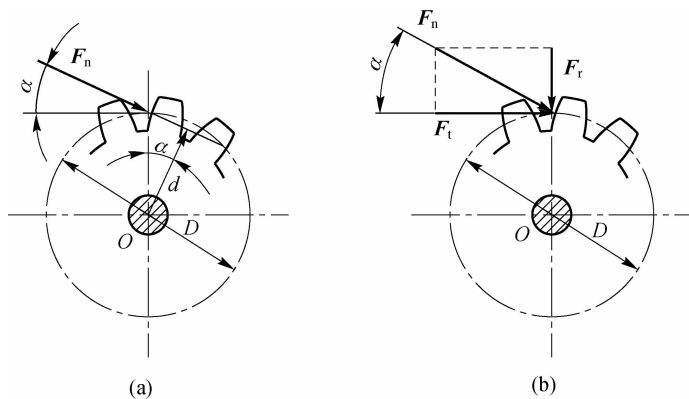


图 1-48 齿轮机构

二、力偶的概念和性质

1. 力偶与力偶矩

在工程问题中,常常遇到受力偶作用的物体。力偶由大小相等、方向相反且不共线的两个平行力 F 与 F' 所组成,通常用符号 (F, F') 表示。两力作用线所决定的平面称为力偶的作用面,力作用线间的垂直距离称为力偶臂。如图 1-49 所示,汽车转动方向盘和电机转子等,都是受到大小相等、方向相反且作用线不在同一直线上的两个平行力的作用。

等值反向平行力的合力等于零,但由于它们不共线而不能相互平衡,它们能使物体改变转动状态。由于力偶不能合成为一个力或用一个力来等效替换,那么力偶也不能用一个力来平衡。力和力偶是静力学的两个基本要素。

力偶由两个力组成,它的作用是改变物体的转动状态。因此,力偶对物体的转动效果,可用力偶的两个力对其作用面内某点的矩的代数和来度量。

设有力偶 (F, F') ,其力偶臂为 d ,如图 1-50 所示。力偶对点 O 的矩为 $M_O(F, F')$,则

$$M(F, F') = M_O(F) + M_O(F') = F \cdot aO - F' \cdot bO = F(aO - bO) = Fd$$

因为矩心 O 是任意选取的,由此可知,力偶的作用效果决定于力的大小和力偶臂的长短,与矩心的位置无关。力与力偶臂的乘积称为力偶矩,记作 $M(F, F')$,简记为 M 。

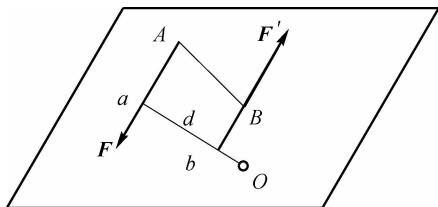


图 1-50 力偶

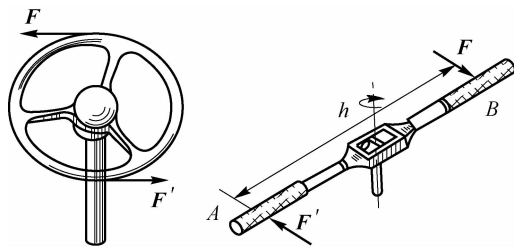

 视频
力偶


图 1-49 汽车转动方向盘和电机转子

由于力偶在平面内的转向不同,其作用效果也不相同。因此,力偶对物体的作用效果,由以下两个因素决定。

- (1)力偶矩的大小。
- (2)力偶在作用平面内的转向。

若把力偶矩视为代数量就可以包括这两个因素,即

$$M = \pm Fd \quad (1-20)$$

于是可得结论:力偶矩是一个代数量,其绝对值等于力的大小与力偶臂的乘积,正负号表示力偶的转向,逆时针转向为正,反之则为负。力偶矩的单位与力矩相同,也是牛顿·米,符号为 $N \cdot m$ 。力偶矩的大小、转向和力偶作用平面为力偶的三要素。

2. 力偶的等效条件

由于力偶的作用只改变物体的转动状态,而力偶对物体的转动效应是用力偶矩来度量的,因此可得平面力偶的等效定理:在同平面内的两个力偶,如果力偶矩相等,则两力偶等效。

由此可知,同平面内力偶等效的条件:力偶矩的大小相等,力偶的转向相同。由此可以推断,保持力偶矩大小与方向不变的条件下,如图 1-51(a)所示,在力偶作用面内随意改变构成力偶的两力的方向(如图 1-51(b)所示),或在保持力偶矩不变情况下改变力与力偶臂的大小(如图 1-51(c)所示),或将力偶作用面平行移动(如图 1-51(d)所示),都不影响力偶对刚体的作用效果。此性质称为力偶的等效性。

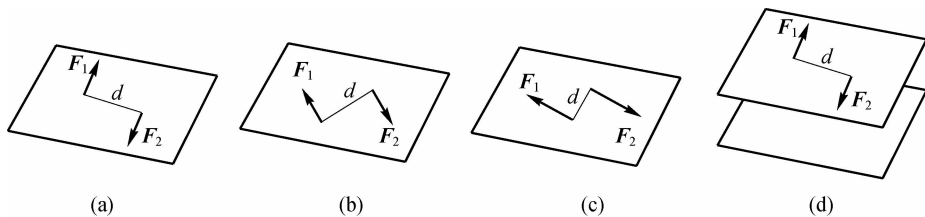


图 1-51 力偶的等效性

由此可得出以下两个重要推论。

(1)只要不改变力偶矩的大小和力偶的转向,力偶就可以在它的作用平面内任意移动或转动,而不改变它对物体的作用效果。

(2)只要保持力偶矩不变,可以同时改变力偶的力的大小和力偶臂的长短,而不会改变力偶对物体的作用效果。

3. 力偶的性质

力偶是两个具有特殊关系的力的组合,具有与单个力不同的性质。

- (1)力偶在任一坐标轴上投影的代数和为零。
- (2)力偶没有合力,因此力偶不能与一个力平衡,它必须用力偶来平衡。
- (3)力偶对物体的作用效应取决于力偶的三要素,而与矩心位置无关。
- (4)力偶对于作用面内任一点之矩为一常量并等于其力偶矩。

三、平面力偶系的合成与平衡

1. 平面力偶系的合成

在物体上同时作用有两个或两个以上的力偶时,这些力偶组成为力偶系。在同一个平面

内的力偶系叫作平面力偶系。由于平面内的力偶对物体的作用效果只决定于力偶的大小和转向,所以平面力偶系合成的结果必然是一个合力偶,并且其合力偶矩应等于各分力偶矩的代数和。设 M_1, M_2, \dots, M_n 为平面力偶系中各力偶矩, M 为合力偶矩,则

$$M = \sum_{i=1}^n M_i \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (1-21)$$

2. 平面力偶系的平衡条件

由于平面力偶系合成的结果只能是一个合力偶,当其合力偶矩等于零时,表明使物体顺时针方向转动的力偶矩与使物体逆时针方向转动的力偶矩相等,作用效果相互抵消,物体处于平衡状态。因此,平面力偶系平衡的必要和充分条件是:所有力偶矩的代数和等于零。即

$$\sum_{i=1}^n M_i = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (1-22)$$

式(1-22)为平面力偶系的平衡方程。应用平面力偶系的平衡方程可以求解一个未知量。

例 1-10 如图 1-52(a)所示,一简支梁作用一矩为 $M=50 \text{ N} \cdot \text{m}$ 的力偶,简支梁长 $d=4 \text{ m}$,不计梁重,求支座 A 和 B 的约束力。

解:以梁为研究对象。梁上除作用有力偶 M 外,还有固定铰链 A 处的约束力 F_A 及活动铰链 B 处垂直向上的约束力 F_B 。根据力偶只能与力偶相平衡的性质,可知 F_A 和 F_B 必组成一个力偶,因此 F_A 的作用线也沿铅垂方向,如图 1-52(b)所示。梁 AB 在两个力偶的作用下处于平衡,根据平面力偶系的平衡条件列平衡方程如下

$$\sum M = 0 \quad M - F_A d = 0$$

解得 $F_A = \frac{M}{d} = 12.5 \text{ N}$, $F_B = F_A = 12.5 \text{ N}$ (方向见图 1-52(b))。

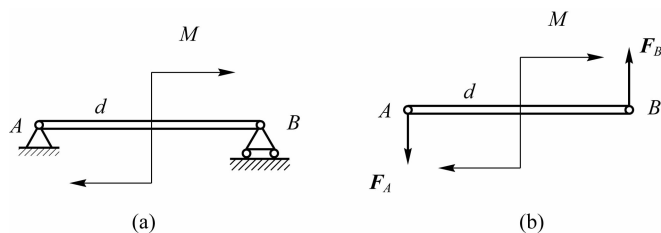


图 1-52 简支梁约束力

例 1-11 如图 1-53(a)所示,四杆机构在图示位置平衡,已知 $l_{OA} = 20 \text{ cm}$, $l_{O_1B} = 40 \text{ cm}$,作用在曲柄 OA 上的力偶矩大小为 $M_1 = 2 \text{ N} \cdot \text{m}$,不计杆重,求作用在杆 O_1B 上的力偶矩 M_2 的大小及连杆 AB 所受的力。

解:(1)取 OA 杆为研究对象。 OA 杆受到力偶矩 M_1 ,二力杆 AB 对其的反作用力 F_{AB} ,以及铰链 O 处的约束力 N_O ,如图 1-53(b)所示,根据平面力偶系的平衡条件,列平衡方程如下

$$\sum M = 0, F_{AB} l_{OA} \sin 30^\circ - M_1 = 0$$

解得 $F_{AB} = \frac{M_1}{l_{OA} \sin 30^\circ} = 20 \text{ N}$ 。

(2)取 AB 杆为研究对象。 AB 杆为二力杆,受力分析如图 1-53(c)所示,可得

$$F'_{BA} = F'_{AB} = F_{AB} = 20 \text{ N}$$

(3) 研究 O_1B 杆, 受力分析如图 1-53(d), 根据平面力偶系的平衡条件, 列平衡方程如下

$$\sum M = 0, -F_{BA} \times l_{O_1B} + M_2 = 0$$

解得 $M_2 = F_{BA}l_{O_1B} = 8 \text{ N}$ 。

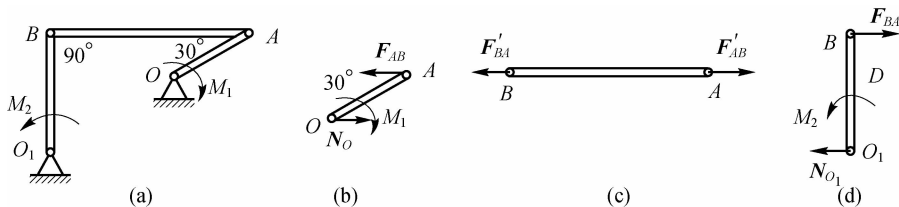


图 1-53 四杆机构



任务实施

平面力偶系平衡问题的求解——求作用于图 1-54(a) 中摇杆 BC 上的力偶矩 M_2 及铰链 O 、 B 处的约束力。

解: (1) 如图 1-54 所示, 先取圆轮为研究对象, 其上作用有矩为 M_1 的力偶及光滑导槽对销子 A 的作用力 F_A 和铰链 O 处约束力 F_O 作用。 F_A 作用方向垂直摇杆 BC , 由于力偶必须由力偶来平衡, 因而 F_O 与 F_A 必定组成为力偶, 力偶矩方向与 M_1 相反, 由此定出 F_A 指向如图 1-54(b) 所示, 而 F_O 与 F_A 等值且反向。根据平面力偶系的平衡条件, 列平衡方程如下

$$\sum M = 0, M_1 - F_A r \sin \alpha = 0$$

$$\text{解得 } F_A = \frac{M_1}{r \sin 30^\circ} = 125 \text{ N}。$$

(2) 以摇杆 BC 为研究对象, 其上作用有矩为 M_2 的力偶及力 F'_A 与 F_B , 如图 1-54(c) 所示。同理, F'_A 与 F_B 必组成为力偶, 由平衡条件, 得

$$\sum M = 0, -M_2 + F'_A \frac{r}{\sin \alpha} = 0$$

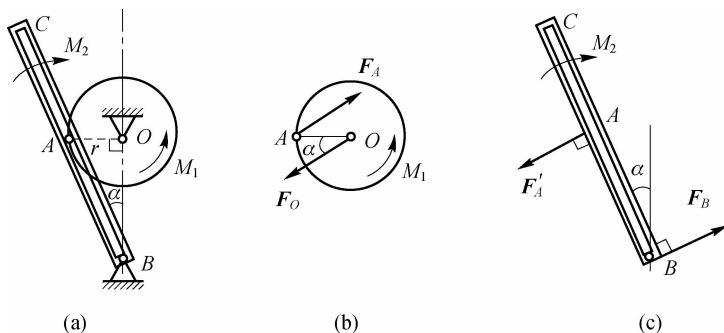


图 1-54 摇杆机构

其中 $F'_A = F_A$, 得 $M_2 = F'_A \frac{r}{\sin \alpha} = 100 \text{ N} \cdot \text{m}$ 。

F_O 与 F_A 组成力偶, F_B 与 F'_A 组成力偶, 则 $F_O = F_B = F_A = 125 \text{ N}$ 。方向见图 1-54(b)、图 1-54(c)。



思考与练习

一、简答题

1. 试比较力矩与力偶矩两者的异同。
2. 力偶的三要素是什么?
3. 力偶对物体的作用效果取决于什么? 与力偶的作用位置是否有关?
4. 力偶是否可以用一个力来平衡? 为什么?
5. 从平面力偶理论知道, 一力不能与力偶平衡。但是为什么图 1-55 所示的轮子上的力偶矩 M 似乎与重物的力 P 相平衡呢?
6. 如图 1-56 所示, 100 N 的力作用于扳手柄端。当 α 角为何值时, 该力矩为最小值? 当 α 角为何值时, 该力矩为最大值?

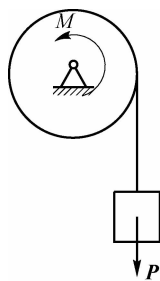


图 1-55 力偶平衡分析

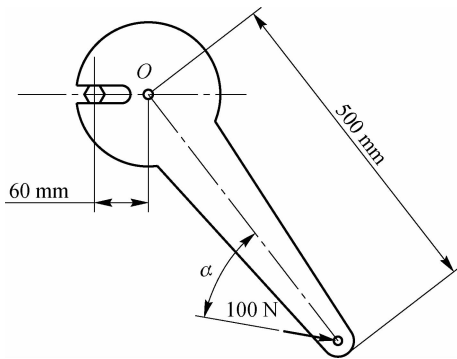


图 1-56 扳手力矩

二、分析计算题

1. 如图 1-57 所示, 设 $AB=l$, 在 A 点受四个大小均等于 F 的力 F_1 、 F_2 、 F_3 和 F_4 作用。试分别计算每个力对 B 点之矩。
2. 图 1-58 中带轮直径 $D=400 \text{ mm}$, 平带拉力 $F_1=1500 \text{ N}$, $F_2=750 \text{ N}$, 与水平线夹角 $\theta=15^\circ$ 。求平带拉力 F_1 、 F_2 对轮心 O 之矩。

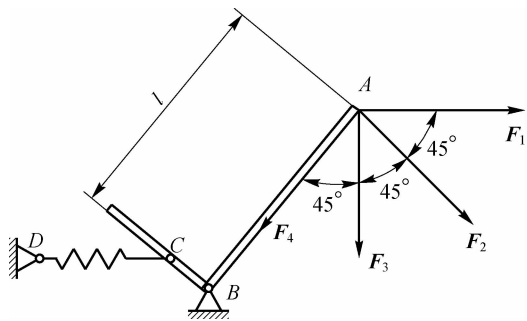


图 1-57 杆件力矩

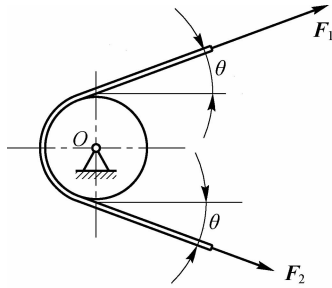


图 1-58 平带拉力矩

3. 求图 1-59 所示平面力偶系的合成结果, 图中长度单位为 m。

4. 如图 1-60 所示, 在一钻床上水平放置工件, 在工件上同时钻 4 个等直径的孔, 每个钻头的力偶矩 $M_1=M_2=M_3=M_4=15 \text{ N} \cdot \text{m}$, 求工件的总切削力偶矩和 A、B 端水平约束力。

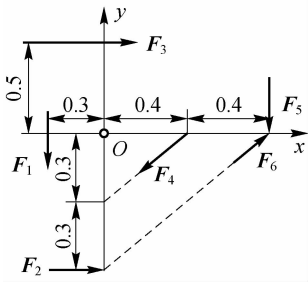


图 1-59 平面力偶系

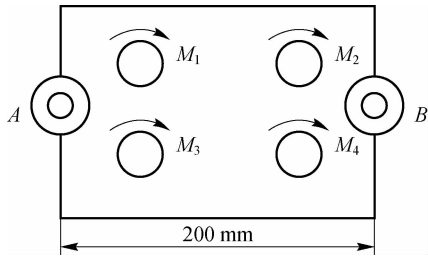


图 1-60 工件约束力

5. 简支梁 AB 如图 1-61 所示, 其上作用一力偶矩 M , 已知梁长为 L , 不计自重, 求支座约束力。

6. 齿轮箱的两个轴上作用的力偶如图 1-62 所示, 它们的力偶矩的大小分别为 $M_1=300 \text{ N} \cdot \text{m}$, $M_2=200 \text{ N} \cdot \text{m}$ 。求两螺栓处的铅垂约束力 F_A 、 F_B 。图中长度单位为 cm。

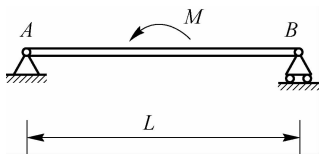


图 1-61 简支梁约束力

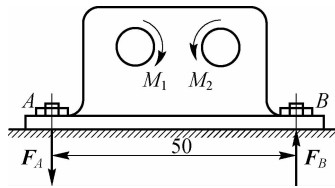


图 1-62 齿轮箱约束力

7. 如图 1-63 所示结构中两曲杆自重不计, 曲杆 AB 上作用有主动力偶, 其力偶矩为 M , 试求 A 和 C 点处的约束力。

8. 如图 1-64 所示机构在图示位置平衡, 已知主动力 $F=100 \text{ N}$, 各杆重量不计, 试求图中力偶矩 M 的大小及支座 A 处的约束力。

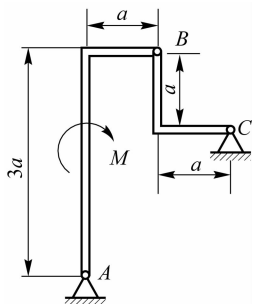


图 1-63 二曲杆约束力

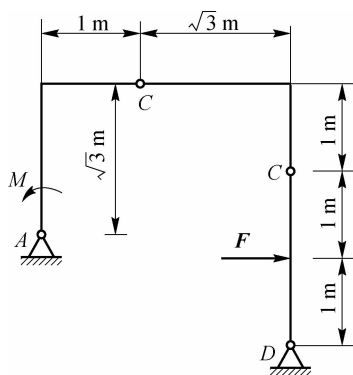


图 1-64 机构约束力

9. 如图 1-65 所示,锻锤工作时,若锻件给它的反作用力有偏心,就会使锤头发生偏斜,在导轨上产生很大的压力,从而加速导轨的磨损,影响锻件的精度。已知打击力 $P=800\text{ kN}$,偏心矩 $e=10\text{ mm}$,锤头高度 $h=100\text{ mm}$ 。求锤头给两侧导轨的压力。

10. 如图 1-66 所示轧钢机工作机构,机架和轧辊共重 $G=650\text{ kN}$,为了轧制钢板,在轧辊上各作用一力偶,力偶矩 $M_1=M_2=828\text{ N}\cdot\text{m}$,机架的支点距离 $l=1\text{ 380 mm}$ 。当发生事故时, $M_1=0, M_2=1\text{ 656 N}\cdot\text{m}$ 。求在正常工作与发生事故两种情形下支点 A、B 的约束力。

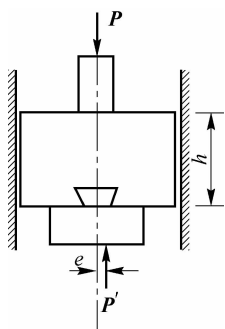


图 1-65 锻锤约束力

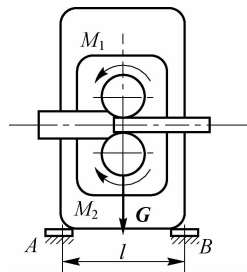


图 1-66 轧钢机工作机构

11. 如图 1-67 所示,直角弯杆 ABCD 与直杆 DE 及 EC 铰接,作用在杆 DE 上的力偶矩 $M=50\text{ N}\cdot\text{m}$,不计各杆件自重,不考虑摩擦。求支座 A、B 处的约束力和杆 EC 的受力。

12. 在图 1-68 所示结构中,各构件的自重略去不计,在构件 BC 上作用一力偶矩 $M=20\text{ N}\cdot\text{m}$,长度 $l=2\text{ m}$ 。求支座 A 的约束力。

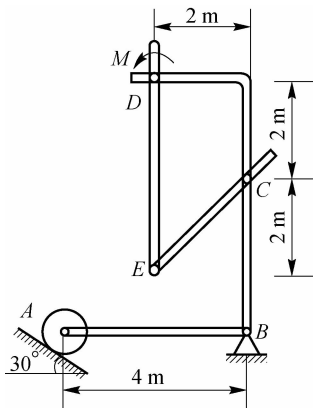


图 1-67 支座约束力和杆的受力

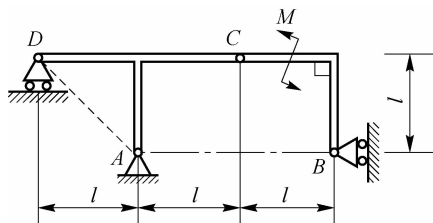


图 1-68 支座约束力

任务四 平面任意力系平衡问题的求解



任务描述

如图 1-69 所示结构由构件 AB、BD 及 DE 构成，A 端为固定端约束，B 及 D 处用光滑圆柱铰链连接，BD 杆的中间支承 C 及 E 端均为铰链支座，已知集中荷载 $P=20\text{ kN}$ ，均布荷载的集度 $q=8\text{ kN/m}$ ，力偶矩 $M=50\text{ kN}\cdot\text{m}$ ，各构件自重不计。试求 A、C 及 E 处的约束力。

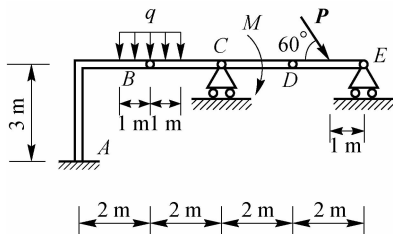


图 1-69 三个构件约束力



任务分析

理解平面任意力系的简化方法，熟练掌握利用平面任意力系平衡方程求解平衡问题的方法。



知识准备

在工程实际中经常遇到平面任意力系的问题，即作用在物体上的力的作用线都分布在

同一平面内,或可以简化到同一平面内,但它们的作用线任意分布,称为平面任意力系。如图 1-70 所示为平面任意力系的例子。

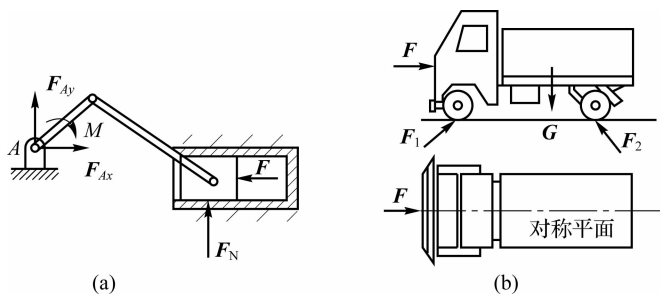


图 1-70 平面任意力系

当物体所受的力对称于某一平面时,也可以简化为平面力系的问题来研究。如图 1-70(b)所示为车体简化受力分析图,这些力都对称于通过重心的纵向铅直平面,因此可以将原力系简化到该平面内,作为平面任意力系来处理。

本任务主要研究平面任意力系的简化和平衡问题的求解。

一、平面任意力系的简化

1. 力的线平移定理

力的线平移就是把作用在刚体上的一力矢从其原位置平行移到该刚体上另一位置。由力的可传性得知,力沿其作用线移动时,对刚体的作用效果是不改变的。下面研究在不改变力对刚体作用效果的前提下将力平行移动到作用线以外的任意一点这个问题。

如图 1-71(a)所示,设有一力 F 作用于刚体的 A 点,为将该力平移到任意一点 O ,在 O 点加一对平衡力 F' 和 F'' ,作用线与 F 平行,且使 $F' = F'' = F$,其中 F 和 F'' 两力组成一个力偶,其力偶臂为 d ,其力偶矩恰好等于原力 F 对点 O 之矩,如图 1-71(b)所示。这三个力可看作是一个作用在 O 点的力 F' 和一个力偶矩 M ,如图 1-71(c)所示。显然,三个力组成的新力系与原来的一个力 F 等效。

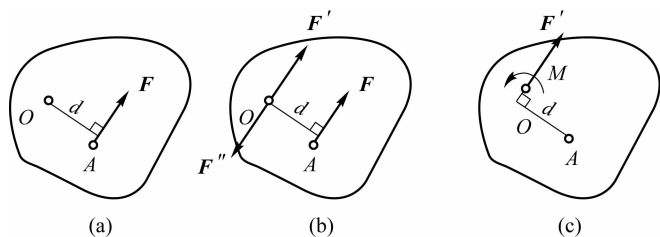


图 1-71 力的线平移

由此可得力的线平移定理:如果把一个力平行移动到一个新作用点,必须附加一个力偶,附加力偶矩的大小等于原力对新作用点之矩。

力的线平移定理是力系向一点简化的理论依据,也是分析和解决工程实际中力学问题的重要方法。

2. 平面任意力系的简化计算

设刚体受一个平面任意力系作用,利用力的线平移定理,可将平面任意力系向一点简化为一个平面汇交力系和一个平面力偶系。然后通过汇交力系和力偶系的合成和平衡方法来解解决平面任意力系的问题。

设想有 n 个力 $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n$ 作用在刚体上,组成平面任意力系,如图 1-72(a)所示。在平面内任取一点 O ,称为简化中心。应用力的线平移定理,把各力都平移到这一点。这样,得到作用于点 O 的力 $\mathbf{F}'_1, \mathbf{F}'_2, \dots, \mathbf{F}'_n$ 以及相应的附加力偶,这些力偶作用在同一平面内,其力偶矩分别为 M_1, M_2, \dots, M_n ,如图 1-72(b)所示,即

$$M_i = M_O(\mathbf{F}_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

这样,平面任意力系分解成了两个力系,平面汇交力系和平面力偶系。然后分别合成这两个力系。

平面汇交力系可按平面汇交力系平衡法则合成为作用通过点 O 的一个力 \mathbf{R}' ,并等于 $\mathbf{F}'_1, \mathbf{F}'_2, \dots, \mathbf{F}'_n$ 的矢量和,如图 1-72(c)所示。因为各力矢 $\mathbf{F}'_i = \mathbf{F}_i (i = 1, 2, \dots, n)$,所以

$$\mathbf{R}' = \mathbf{F}'_1 + \mathbf{F}'_2 + \dots + \mathbf{F}'_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i (i = 1, 2, \dots, n)$$

即力矢 \mathbf{R}' 等于原来各力的矢量和。

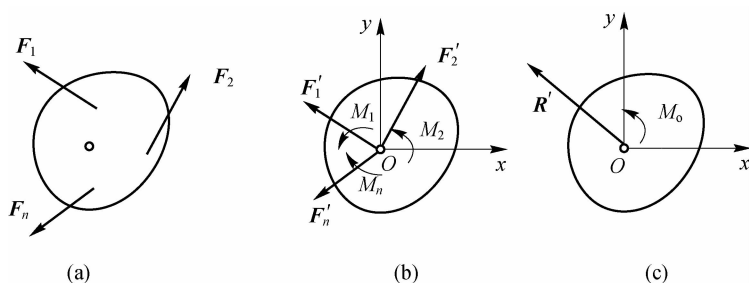


图 1-72 平面任意力系的简化

根据前面所述,平面力偶系可合成为一个力偶,该力偶的矩 M_O 等于各力偶矩的代数和。即

$$M_O = M_1 + M_2 + \dots + M_n = \sum_{i=1}^n M_O(\mathbf{F}_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

即力偶矩 M_O 等于原来各力对点 O 之矩的代数和。

平面任意力系中所有各力的矢量和 \mathbf{R}' ,称为该力系的主矢。而这些力对于任选简化中心的矩的代数和 M_O ,称为该力系对于简化中心的主矩。

根据上述结果可知,在一般情形下,平面任意力系向作用面内任选一点 O 简化,可得一个力和一个力偶,这个力等于该力系的主矢,即

$$\mathbf{R}' = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1-23)$$

该力偶作用在简化中心 O ,其矩等于该力系对于点 O 的主矩,即

$$M_O = \sum_{i=1}^n M_O(\mathbf{F}_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1-24)$$

由于主矢等于各力的矢量和,所以它与简化中心的选择无关。而主矩等于各力对简化中心的矩的代数和,取不同的点为简化中心,各力的力臂将有改变,则各力对简化中心的矩也有改变,所以在一般情况下主矩与简化中心的选择有关。因此说到主矩时必须指出是力系对于哪一点的主矩。

为了求出力系的主矢 \mathbf{R}' 的大小和方向,可应用解析法。通过点 O 取坐标系 Oxy ,则有

$$R'_x = X_1 + X_2 + \cdots + X_n = \sum_{i=1}^n F_{x_i} \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

$$R'_y = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n = \sum_{i=1}^n F_{y_i} \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

式中, R'_x 和 R'_y 以及 X_1, X_2, \cdots, X_n 和 Y_1, Y_2, \cdots, Y_n 分别为主矢 \mathbf{R}' 以及原力系中各力 $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \cdots, \mathbf{F}_n$ 在 x 轴和 y 轴上的投影。

于是主矢 R' 的大小和方向分别由下列两式确定:

$$R' = \sqrt{R_x'^2 + R_y'^2} = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2} \quad (1-25)$$

$$\cos \alpha = \frac{R'_x}{R'}, \cos \beta = \frac{R'_y}{R'} \quad (1-26)$$

式中, α 和 β 分别为主矢 \mathbf{R}' 与 x 轴和 y 轴间的夹角($^\circ$)。

3. 平面任意力系的简化结果——合力矩定理

平面任意力系向作用面内一点简化的结果,通常为一个力和一个力偶,但可能有以下 4 种情况。

(1) 若 $\mathbf{R}' = 0, M_O \neq 0$, 则原力系简化为一个力偶,其矩等于原力系对简化中心的主矩,简化结果与简化中心的选择无关。

(2) 若 $\mathbf{R}' \neq 0, M_O = 0$, 则原力系简化为一个力,此时附加力偶系平衡,主矢 \mathbf{R}' 即为原力系的合力 \mathbf{R} ,作用线通过简化中心 O 。

(3) 若 $\mathbf{R}' \neq 0, M_O \neq 0$, 则原力系简化为一个力和一个力偶。在这种情况下,根据力的线平移定理,这个力和力偶还可以继续合成为一个合力 \mathbf{R} 。

如图 1-73(a)所示,力系向点 O 简化的结果是主矢和主矩都不等于零,现将力偶矩 M_O 用两个力 \mathbf{R} 和 \mathbf{R}' 表示,并令 $R' = R = -R''$,如图 1-73(b)所示。于是可将作用于点 O 的力 \mathbf{R}' 和力偶 $(\mathbf{R}, \mathbf{R}'')$ 合成为一个作用在点 O' 的力 \mathbf{R} ,如图 1-73(c)所示。

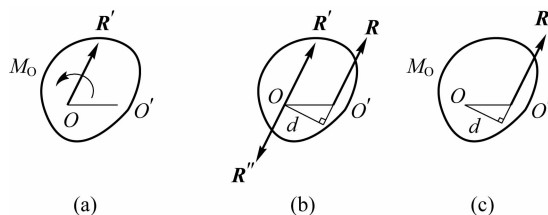


图 1-73 合力矩

这个力 \mathbf{R} 就是原力系的合力,合力的大小等于主矢 \mathbf{R}' 。合力的作用线在点 O 的哪一侧,需根据主矢和主矩的方向确定。合力作用线距点 O 的距离 d 的大小可按式算得

$$d = \frac{M_O}{R'}$$

因为: $M_O = M(\mathbf{R}, \mathbf{R}') = Rd = R'd$ 。

下面证明平面任意力系的合力矩定理。

由图 1-73(b)可见,合力 \mathbf{R} 对点 O 的矩

$$M_O(\mathbf{R}) = Rd = M_O$$

由力系向一点简化的理论知,各分力(即原力系的各力)对点 O 之矩的代数和等于主矩,即

$$\sum_{i=1}^n M_O(\mathbf{F}_i) = M_O \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

所以

$$M_O(\mathbf{R}) = \sum_{i=1}^n M_O(\mathbf{F}_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1-27)$$

由于简化中心 O 是任意选取的,故上式有普遍意义,即平面任意力系的合力对作用面内任一点的矩等于力系中各力对同一点的矩的代数和,这就是合力矩定理。

(4)若 $\mathbf{R}' = 0, M_O = 0$,则原力系是平衡力系。

例 1-12 如图 1-74 所示,已知 $F_1 = 4 \text{ N}, F_2 = 6 \text{ N}, F_3 = 10 \text{ N}$,分别作用在 C, O, B 点上, $OABC$ 为一正方形,边长为 4 m 。求力系的最终简化结果。

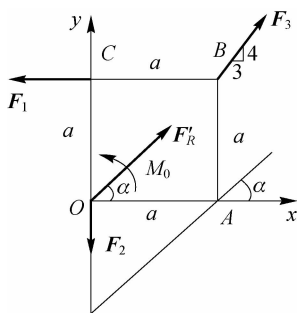


图 1-74 正方形力系的简化

解:建立如图 1-74 所示坐标系 Oxy ,各力向 O 点简化,可列以下算式。

$$F'_{Rx} = \sum F_x = F_3 \times \frac{3}{5} - F_1 = 2 \text{ N}$$

$$F'_{Ry} = \sum F_y = F_3 \times \frac{4}{5} - F_2 = 2 \text{ N}$$

$$M_O = \sum M_O(\mathbf{F}_i) = F_1 a - F_{3x} a + F_{3y} a = 24 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$F'_R = \sqrt{(F'_{Rx})^2 + (F'_{Ry})^2} = 2\sqrt{2} \text{ N}$$

$$\tan \alpha = \frac{F'_{Ry}}{F'_{Rx}} = 1, \text{ 所以 } \alpha = 45^\circ. \quad d = \frac{|M_O|}{F'_R} = \frac{24}{2\sqrt{2}} = 6\sqrt{2} \text{ m}.$$

因为 $F'_R \neq 0, M_O \neq 0$,所以,最终可进一步简化成一合力,该合力 \mathbf{F}_R 等于主矢 \mathbf{F}'_R ,作用

线在 O 的右下方,从简化中心到合力作用线的距离为 d 。

二、平面任意力系的平衡方程

由平面任意力系的简化可知:主矢等于零,表明作用于简化中心的汇交力系为平衡力系;主矩等于零,表明附加力偶系也是平衡力系。因此平面任意力系平衡的必要和充分条件:力系的主矢与主矩同时等于零。即

$$\mathbf{R}'=0, M_O=0 \quad (1-28)$$

平衡条件可用解析式表示为

$$\sum F_x = 0, \sum F_y = 0, \sum M_O(\mathbf{F}) = 0 \quad (1-29)$$

式(1-29)为平面任意力系的平衡方程,它是平衡方程的基本形式,表示力系中各力在两个任意的坐标轴上投影的代数和等于零,以及各力对平面内任意点之矩的代数和也等于零。



注意

在应用平衡方程解题时,为使计算简化,通常将矩心选在众多未知力的交点上。坐标应尽可能选取与该力系中多数未知力的作用线平行或垂直,尽可能避免解联立方程。

例 1-13 钢筋混凝土钢架的受力及支座情况如图 1-75(a) 所示。已知 $F=50 \text{ N}$, $M=90 \text{ N} \cdot \text{m}$, A 、 B 距离为 4 m , 钢架高为 6 m , 钢架自重不计,求支座约束力。

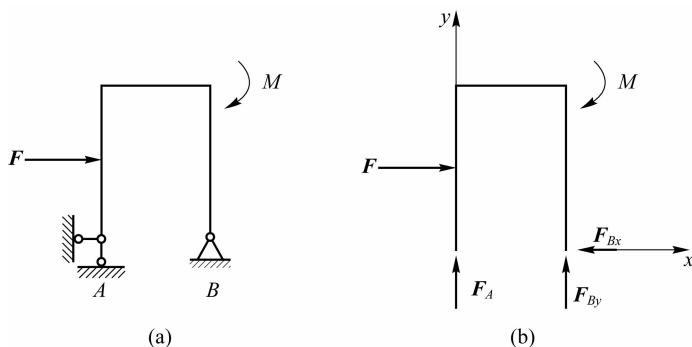


图 1-75 钢筋混凝土钢架

解:(1)取刚架为研究对象。

(2)受力和画受力图。刚架在活动铰链 A 处受到垂直向上的约束力 F_A ,在固定铰链 B 处受的力可分解为水平方向的力 F_{Bx} 和垂直方向的力 F_{By} ,以及受到力偶 M 的作用,如图 1-75(b)所示。

(3)建立坐标轴见图 1-75(b),列平衡方程如下

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0, F - F_{Bx} = 0 \\ \sum F_y &= 0, F_A + F_{By} = 0 \end{aligned}$$

$$\sum M_A(\mathbf{F}) = 0, -F \times \frac{6}{2} - M + F_{By} \times 4 = 0$$

解得 $F_A = -60 \text{ N}$, $F_{Bx} = 50 \text{ N}$, $F_{By} = 60 \text{ N}$ 。

此外,平面力系的平衡方程,除了它的基本形式外,还有如下等价形式。

二力矩式平衡方程为

$$\sum_{i=1}^n F_x = 0, \sum_{i=1}^n M_A(\mathbf{F}_i) = 0, \sum_{i=1}^n M_B(\mathbf{F}_i) = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1-30)$$

其中, A, B 两点的连线与 x 轴不垂直。

三力矩式平衡方程为

$$\sum_{i=1}^n M_A(\mathbf{F}_i) = 0, \sum_{i=1}^n M_B(\mathbf{F}_i) = 0, \sum_{i=1}^n M_C(\mathbf{F}_i) = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1-31)$$

其中, A, B, C 点不共线。

平衡方程的多种形式给列写平衡方程提供了很大的余地。一般都可把三元一次方程组转化成三个比较简单的一元一次方程,从而简化了解题过程。

平面汇交力系和平面平行力系以及平面力偶系都是平面力系的特例。平面汇交力系的平衡方程为

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1-32)$$

对平面平行力系,取 x 轴与各力平行,则其平衡方程为

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \sum_{i=1}^n M_O(\mathbf{F}_i) = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1-33)$$

平面力偶系只有一个平衡方程,即

$$\sum_{i=1}^n M_i = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1-34)$$



注意

不论选用哪种形式的平衡方程,对于同一平面力系来说,最多只能列出三个独立的平衡方程,因而只能求出三个未知量。选用力矩式方程,必须满足使用条件,否则所列平衡方程将不是独立的。

例 1-14 一刚架受到均布载荷 $q = 2 \text{ kN/m}$ 和集中力 $F = 4 \text{ kN}$ 的作用,刚架高 $h = 2 \text{ m}$,宽 $a = 1 \text{ m}$,如图 1-76(a)所示。试求 A, B 支座处约束力。

解: (1) 取刚架为研究对象。

(2) 受力和画受力图。刚架在活动铰链 A 处分别受到水平和垂直方向的约束力 F_{Ax} 和 F_{Ay} ,在 B 处活动铰链受到垂直方向的力 F_{By} ,以及均布载荷 q 和集中力 F 的作用,如图 1-76(b)所示。

(3) 以 A 为原点,建立坐标轴,见图 1-76(b)。列平衡方程如下

$$\sum M_A = 0, F_{By} \times a - \frac{1}{2}qa^2 - Fh = 0$$

$$\sum M_B = 0, \frac{1}{2}qa^2 - F_{Ay} \times a - Fh = 0$$

$$\sum F_x = 0, F_{Ax} + F = 0$$

解得 $F_{Ax} = -4 \text{ kN}$, $F_{Ay} = -7 \text{ kN}$, $F_{By} = 9 \text{ kN}$ 。 F_{Ax} 和 F_{Ay} 为负值, 表示该力的假设方向与实际方向相反。

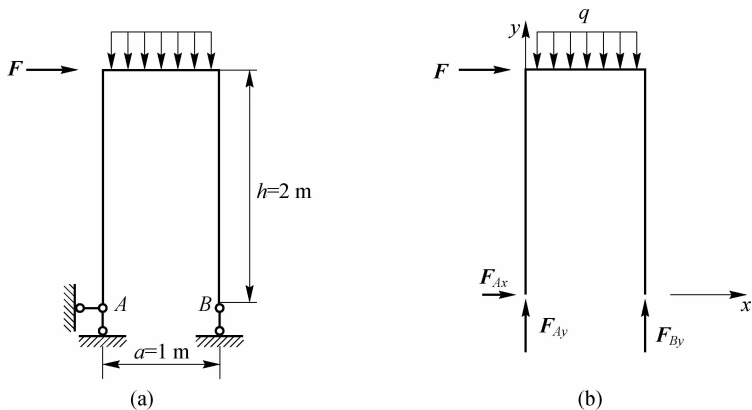


图 1-76 刚架支座约束力

例 1-15 如图 1-77(a)所示, 水平梁受载荷 $F=60 \text{ kN}$, 均布载荷 $q=20 \text{ kN/m}$, 梁的自重不计, 试求 A、B 处的支座约束力。

解: (1) 选取研究对象。取梁 AB 为研究对象。

(2) 受力和画受力图。梁上作用竖直向下的载荷 F 、 q 和活动铰链 B 处竖直向上支座约束力 F_B , 要保证力系为平衡力系, 固定铰链 A 处支座约束力 F_A 必为竖直方向。这样荷载和支座约束力组成平面平行力系, 如图 1-77(b)所示。

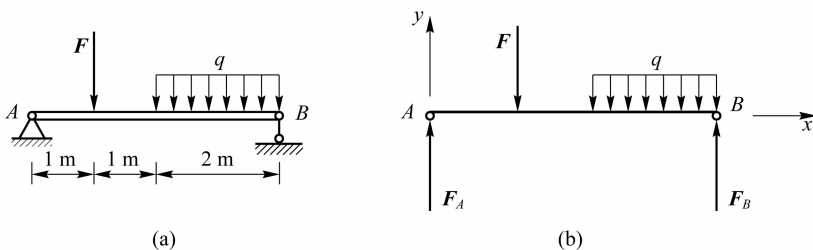


图 1-77 水平梁支座反力

(3) 以 A 为原点, 建立坐标系, 见图 1-77(b), 列平衡方程如下

$$\sum F_y = 0, F_A + F_B - F - q \times 2 = 0$$

$$\sum M_A = 0, F_B \times 4 - F \times 1 - q \times 2 \times 3 = 0$$

解得 $F_A = 55 \text{ kN}$, $F_B = 45 \text{ kN}$ 。

三、静定和静不定物系平衡问题分析

1. 静定和静不定系统概念

工程中的机械结构一般是由若干部件以一定形式的约束联系在一起而组成的, 这个组合体称为物体系统, 简称为物系。

在刚体静力学中, 对于由 n 个物体组成的物系, 若每个物体受平面任意力系作用, 则可

列 $3n$ 个独立的平衡方程。如系统中某些物体受平面汇交力系或平面平行力系等作用时,则平衡方程总数相应减少。独立平衡方程数与未知量数相比较,若未知量的数目少于平衡方程数,则已知条件多余,结构不平衡或结构不稳固;若未知量的数目等于平衡方程数,则由平衡方程能解出全部未知量,系统是静定的;若未知量的数目多于平衡方程数,则仅用静力学平衡方程不能解出全部未知量,是静不定系统或称为超静定系统。

对于超静定系统,需要考虑物体因受力而产生的变形,加列某些补充方程后才能求解出全部的未知量。超静定问题已超出刚体静力学的范围,需在材料力学和结构力学中研究,以下只讨论静定系统的平衡问题。

2. 静定物系的平衡问题

研究物系的平衡问题时,不仅要分析系统以外的物体对系统的作用力,还需要分析系统内部各物体之间的相互作用力。内力总是成对出现,对整个系统来说,因内力的矢量和恒等于零,故不必考虑内力。当要求系统内力时,则需将系统中与所求内力有关的物体单独取为分离体。这就是说研究物系的平衡问题时,既要研究整体的平衡,也要研究局部的平衡,才能使问题得到解决。当整个系统平衡时,其各组成部分也是平衡的。根据问题的需要恰当地选取整体或局部为研究对象进行分析,是解决物系平衡问题的关键,也是与解决单个物体平衡问题的差别所在。

物系处于整体平衡时,组成系统的每一刚体或由若干个刚体组成的子系统都处于平衡状态,都可以作为研究对象。一般来讲,研究对象的选择大体可遵循以下几个原则。

(1) 如果系统的外部约束力的全部或部分能通过对系统的整体分析而求出,则可先取整体为研究对象。

(2) 选择受力情况最简单,且未知约束力最少的某刚体或子系统为研究对象。

(3) 选择合适的坐标系和矩心,尽可能使 1 个方程只包含 1 个未知力。尽量避免求解联立的平衡方程。

(4) 对于由圆柱铰链连接的多个刚体,可将销钉处理成依附于任意一个刚体上,也可以单独取销钉为研究对象。通常采用前者。

下面通过若干实例说明分析求解的具体步骤。

例 1-16 如图 1-78(a)所示,水平梁由 AC 和 CD 两部分组成,它们在 C 处用铰链相连。梁的 A 端固定在墙上,在 B 处受可动铰链支座约束。已知 $F_1 = 30 \text{ kN}$, $F_2 = 50 \text{ kN}$, 均布载荷 $p = 8 \text{ kN/m}$, 梁的 BD 段受线性分布载荷作用,在 D 端为零,在 B 处达最大值 $q = 12 \text{ kN/m}$ 。试求 A 和 B 两处的约束力。

解: 选整体为研究对象,由图 1-78(a)所示的受力情况可知,三角形分布载荷的合力作用在离 B 点 $\frac{1}{3}BD$ 处,它的大小等于三角形面积,即 $\frac{1}{2}q \times 1$, 列平衡方程如下

$$\sum F_x = 0, F_{Ax} = 0$$

$$\sum F_y = 0, F_{Ay} + F_{NB} - F_2 - F_1 - p \times 1 - \frac{1}{2}q \times 1 = 0$$

$$\sum M_A(\mathbf{F}) = 0, M_A + F_{NB} \times 3 - F_2 \times 0.5 - F_1 \times 2.5 - p \times 1 \times 1.5 - \frac{1}{2}q \times 1 \times (3 + \frac{1}{3}) = 0$$

以上 3 个方程包含 4 个未知量,故再选择梁 CD 为研究对象,受力如图 1-78(b)所示。列平衡方程如下

$$\sum M_C(\mathbf{F}) = 0, F_{NB} \times 1 - F_1 \times 0.5 - \frac{1}{2}q \times 1 \times (1 + \frac{1}{3}) = 0$$

解得 $F_{NB} = 23 \text{ kN}$,代入前面三个方程,解得 $F_{Ax} = 0, F_{Ay} = 71 \text{ kN}, M_A = 63 \text{ kN} \cdot \text{m}$ 。

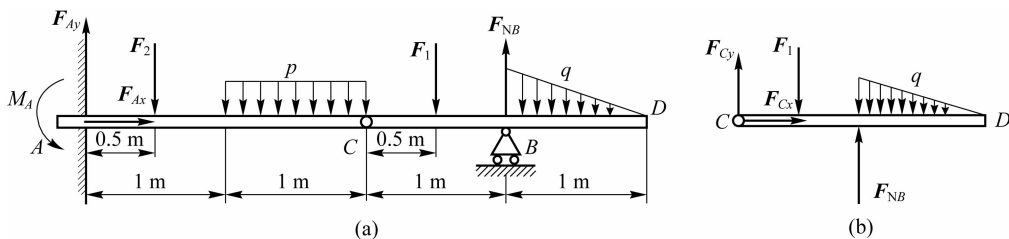


图 1-78 水平梁约束力

四、考虑摩擦时物系平衡问题分析

物体间的接触面不存在绝对光滑,只有摩擦很小或者摩擦作为次要因素不予考虑时才将接触面视为理想光滑的。摩擦在工程上有利有弊,摩擦增大了阻力,利用摩擦传递能量是其利,消耗了能量是其弊。按照物体表面相对运动的情况,摩擦可以分为滑动摩擦和滚动摩擦两类。滚动摩擦阻力一般较小,在许多工程问题中常常可忽略不计。下面主要讨论考虑滑动摩擦时物系的平衡问题。

1. 滑动摩擦

滑动摩擦是指物体接触面作相对滑动或具有相对滑动趋势时的摩擦。滑动摩擦又可以分为静滑动摩擦和动滑动摩擦两种情况。

1) 静滑动摩擦

静滑动摩擦是物体间具有相对运动趋势时的摩擦。如图 1-79(a)所示,重量为 G 的物块放置于水平桌面上,绳子一端系在物块上,另一端绕过一滑轮系在一个砝码上,此时物块在砝码拉力的作用下将向前运动或具有向前运动的趋势。对物块进行受力分析如图 1-79(b)所示,如果物块受力处于静止状态,说明在水平方向上,物块受到与砝码拉力 T 方向相反的力 F ,其大小应该等于砝码的拉力,即

$$F = -T \quad (1-35)$$

力 F 就称为静滑动摩擦力,简称静摩擦力。

当砝码重量逐渐加大后,在一定范围内,物块仍然保持静止不动,说明物块仍然保持平衡状态。在这个过程中,静摩擦力也随着砝码的拉力的增大而增大。当砝码的重量增大到某一确定的值时,物块在砝码确定的拉力作用下开始向前运动,根据平衡条件,摩擦力为已经确定的值,不再增大。物块处于将动未动的状态称为其运动的临界平衡状态,临界平衡状态的摩擦力称为最大静摩擦力或极限静摩擦力,用符号 F_m 表示。可见,静摩擦力的大小随主动力大小的变化而改变,其大小可以通过力的平衡方程求得,它的方向与两个接触物体相

对滑动的趋势相反。静摩擦力的取值范围是

$$0 \leq F \leq F_m \quad (1-36)$$

大量的实验表明,最大静摩擦力的大小与支承面对物块的约束力 F_N 成正比。用计算式表述为

$$F_m = f F_N \quad (1-37)$$

式中, f 称为静摩擦因数,其大小取决于接触面的材料、粗糙度、温度和湿度等环境条件。

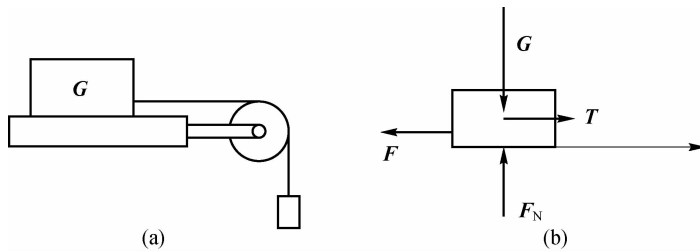


图 1-79 滑动摩擦

2) 动滑动摩擦

当拉力刚刚超过极限摩擦力,即最大静摩擦力时,接触面对物块的摩擦力无法让物块继续保持平衡状态而发生滑动。这时的摩擦力称为动滑动摩擦力,它的方向与物体间相对滑动的方向相反。实验结果表明,它的大小由下式确定

$$F' = f' F_N \quad (1-38)$$

式中, f' 为动摩擦因子, F_N 为接触面的约束力。

以上分析说明,考虑滑动摩擦问题时,要分清物体处于静止、临界平衡和滑动三种情况中的哪种状态,然后选用相应的方法进行计算。

3) 摩擦角与自锁现象

将重为 G 的物体放在表面粗糙的固定水平面上,这时物体在重力 G 与约束力 F_N 作用下处于平衡,如图 1-80(a)所示。物体受力 F_P 作用仍静止时,把它所受的约束力 F_N 和切向摩擦力 F 合成为一个反力 F_R ,称为全约束力或全反力。它与接触面法线间的夹角为 φ ,由此得

$$\tan \varphi = \frac{F}{F_N} \quad (1-39)$$

φ 角随主动力的变化而变化,当物体处于平衡的临界状态时,静摩擦力达到最大静摩擦力 F_m , φ 角也将达到相应的最大值 φ_f ,称为临界摩擦角,简称摩擦角。如图 1-80(b)所示,此时有

$$\tan \varphi_f = \frac{F_m}{F_N} = \frac{f F_N}{F_N} = f \quad (1-40)$$

式(1-40)表明,静摩擦因数等于摩擦角的正切。

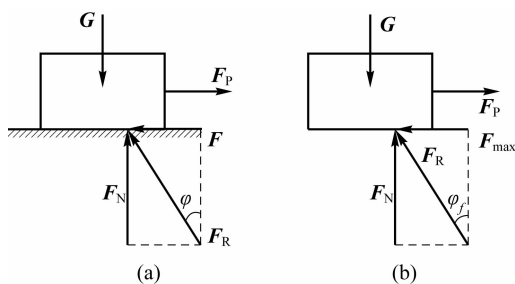


图 1-80 摩擦角

由于静摩擦力不能超过其最大值 F_m , 因此 φ 角总是小于等于摩擦角 φ_f 即 $0 \leq \varphi \leq \varphi_f$, 即全反力的作用线不可能超出摩擦角的范围。

由此可知: (1) 当主动力的合力 F_Q 的作用线在摩擦角 φ_f 以内时, 由二力平衡公理可知, 全反力 F_R 与之平衡, 如图 1-81 所示。因此只要主动力合力的作用线与接触面法线间的夹角 α 不超过 φ_f , 即

$$\alpha \leq \varphi_f \quad (1-41)$$

则不论该合力的大小如何, 物体总处于静定平衡状态, 这种现象称为摩擦自锁, 式(1-41)称为自锁条件。利用自锁原理可设计某些机构或夹具, 如圆锥销等, 使之始终保持在平衡状态下工作。

(2) 当主动力合力的作用线与接触面法线间的夹角 $\alpha > \varphi_f$ 时, 全反力不可能与之平衡, 因此不论这个力多么小, 物体一定会滑动。

在机械传动装置的设计中, 为避免机构间自行卡死, 需要注意避免自锁现象的发生。反之, 为了机构的安全, 往往也需要自锁设计, 如千斤顶、压榨机和蜗轮蜗杆传动中的自锁等。

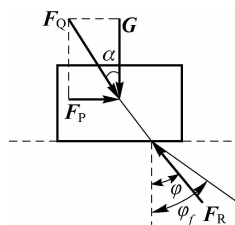


图 1-81 摩擦角的范围

2. 考虑摩擦时物系平衡问题计算

考虑摩擦时物系的平衡问题与不考虑摩擦时物系的平衡问题有着共同特点, 即物体平衡时应满足平衡条件, 解题方法与过程也基本相同。但是这类平衡问题的分析过程也有其特点。首先受力分析时必须考虑摩擦力, 而且要注意摩擦力的方向与相对滑动趋势的方向相反; 其次, 在滑动之前, 即处于静止状态时, 摩擦力不是一个定值, 而是在一定的范围内变化。

例 1-17 图 1-82(a) 所示, 一重为 G 的物体放在倾角为 α 的固定斜面上。已知物块与斜面间的静摩擦因数 f_s (摩擦角为 $\varphi_f = \arctan f_s$), 试求维持物块平衡的水平推力 F 的取值范围。

解: 根据经验, F 值过大, 物块将上滑, F 值过小, 物块将下滑, 故 F 值只在一定范围内 ($F_{\min} \leq F \leq F_{\max}$) 才能保持物块静止。下面就两种极限情况进行分析。

(1) 求 F_{\min} , 即将下滑的临界状态。假设静摩擦力 F_1 的方向沿斜面向上, 其受力和坐标系如图 1-82(b) 所示。列平衡方程如下

$$\sum F_x = 0, F_{\min} \cos \alpha + F_1 = 0$$

$$\sum F_y = 0, -F_{\min} \sin \alpha - G \cos \alpha + F_{N1} = 0$$

由静摩擦定律建立补充方程

$$F_1 = f_s F_{N1} = F_{N1} \tan \varphi_f$$

解得

$$F_{\min} = G \frac{\sin \alpha - f_s \cos \alpha}{\cos \alpha - f_s \sin \alpha} = G \tan (\alpha - \varphi_f)$$

(2)求 F_{\max} , 即将上滑的临界状态。假设静摩擦力 F_2 的方向沿斜面向下, 其受力和坐标系如图 1-82(c)所示。列平衡方程如下

$$\sum F_x = 0, F_{\max} \cos \alpha - G \sin \alpha - F_2 = 0$$

$$\sum F_y = 0, -F_{\max} \sin \alpha - G \cos \alpha + F_{N2} = 0$$

由静摩擦定律建立补充方程

$$F_2 = f_s F_{N2} = F_{N2} \tan \varphi_f$$

解得

$$F_{\max} = G \frac{\sin \alpha + f_s \cos \alpha}{\cos \alpha - f_s \sin \alpha} = G \tan (\alpha + \varphi_f)$$

由以上分析得知, 欲使物块保持平衡, 力 F 的取值范围应为

$$G \tan (\alpha - \varphi_f) \leq F \leq G \tan (\alpha + \varphi_f)$$

另外, 应用摩擦角的概念, 可采用几何法求解本题。

当 $F = F_{\min}$ 时, 物块处于即将下滑的临界平衡状态, 全反力 F_{R1} 与法线的夹角为摩擦角 φ_f , 物块在 G 、 F 、 F_{R1} 三力作用下处于平衡, 如图 1-82(d)所示, 作封闭的力三角形, 得

$$F_{\min} = G \tan (\alpha - \varphi_f)$$

当 $F = F_{\max}$ 时, 物块处于即将上滑的临界平衡状态, 全反力 F_{R2} 与法线的夹角也是 φ_f , 但 F_{R1} 与 F_{R2} 分布于接触面公法线的两侧, 如图 1-82(e)所示。作封闭的力三角形可得

$$F_{\max} = G \tan (\alpha + \varphi_f)$$

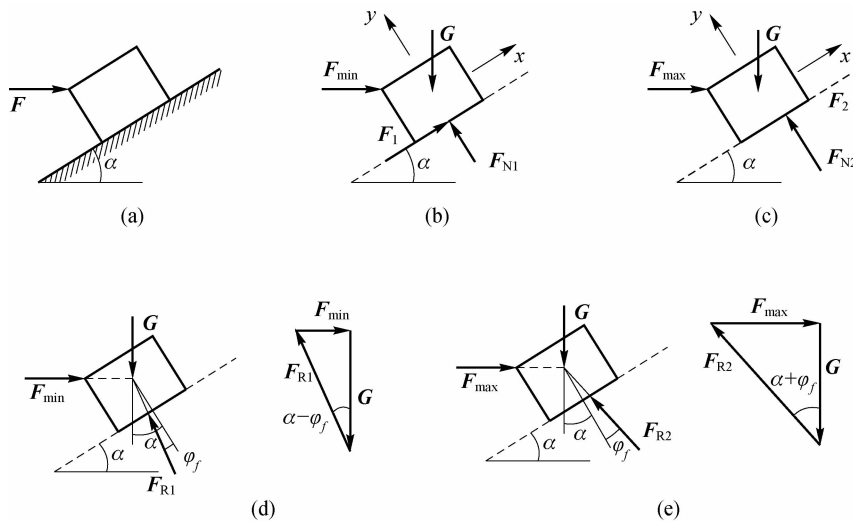


图 1-82 斜面重物受力



任务实施

平面任意力系平衡问题的求解——求图 1-83(a)中构件 A、C 和 E 处的约束力。

解：(1)取构件 DE 为研究对象，受力图如图 1-83(b)所示，列写平衡方程如下

$$\sum M_D(\mathbf{F}) = 0, 2N_E - P \sin 60^\circ = 0$$

解得 E 处的约束力 $N_E = 8.66 \text{ kN}$ 。

(2)取构件 BD、DE 组成的系统。为研究对象，受力图如图 1-83(c)所示，列写平衡方程如下

$$\sum M_B(\mathbf{F}) = 0, 6N_E - 5P \sin 60^\circ - M + 2N_C - \frac{1}{2}q = 0$$

解得 C 处的约束力 $N_C = 44.32 \text{ kN}$ 。

(3)取整体为研究对象，受力图如图 1-83(d)所示，列写平衡方程如下

$$\sum F_x = 0, R_{Ax} + P \cos 60^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0, R_{Ay} + N_C + N_E - 2q - P \sin 60^\circ = 0$$

$$\sum M_A(\mathbf{F}) = 0, 8N_E - 7P \sin 60^\circ - 3P \cos 60^\circ - M - 4N_C - 2 \times 2q + M_A = 0$$

解得 A 处的约束力 $R_{Ax} = -10 \text{ kN}$, $R_{Ay} = -19.66 \text{ kN}$, $M_A = 190.62 \text{ kN} \cdot \text{m}$, R_{Ax} 和 R_{Ay} 为负值，表示力的假设方向与实际方向相反。

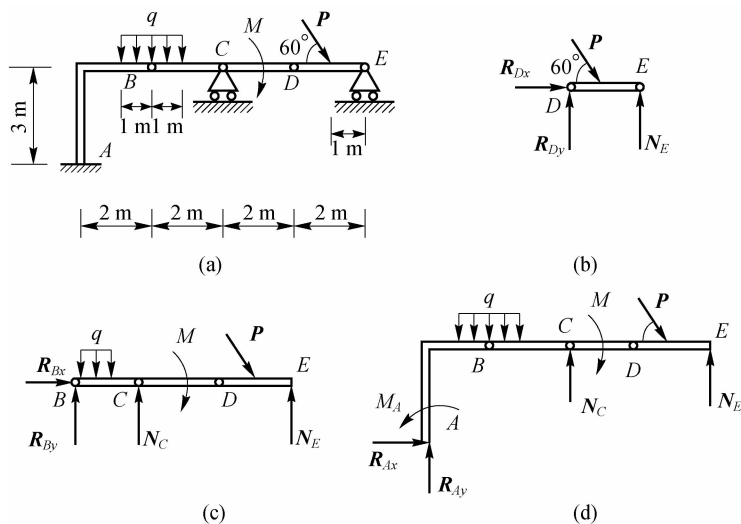


图 1-83 三构件约束力求解



思考与练习

一、简答题

1. 设一平面任意力系向某一点简化得到一合力。如另选适当的点为简化中心,力系能否简化为一力偶?为什么?

2. 某平面力系向同平面内任一点简化的结果都相同,此力系简化的最终结果是什么?

3. 平面汇交力系的平衡方程中,可否取两个力矩方程,或一个力矩方程和一个投影方程,其矩心和投影轴的选择有什么限制?

4. 如图 1-84 所示为一起重机, A、B、C 处均为光滑铰链连接,水平杆 AB 的重量 $G=6\text{ kN}$, 载荷 $F=12\text{ kN}$, 有关尺寸如图所示, BC 杆自重不计。如果载荷 F 可以沿杆 AB 移动, 问:

(1) 载荷 F 在什么位置时杆 BC 所受的拉力最大? 其值为多少?

(2) 载荷 F 在什么位置时铰链 A 处的约束力达到最大值? 其值为多少?

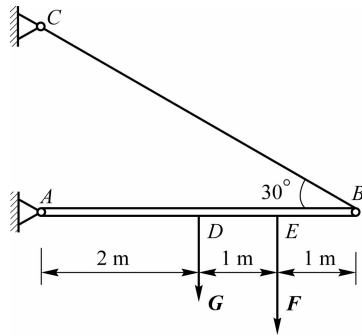


图 1-84 起重机受力

5. 怎么判断静定和超静定问题? 如图 1-85 所示的 6 种情形中哪些是静定问题? 哪些是超静定问题?

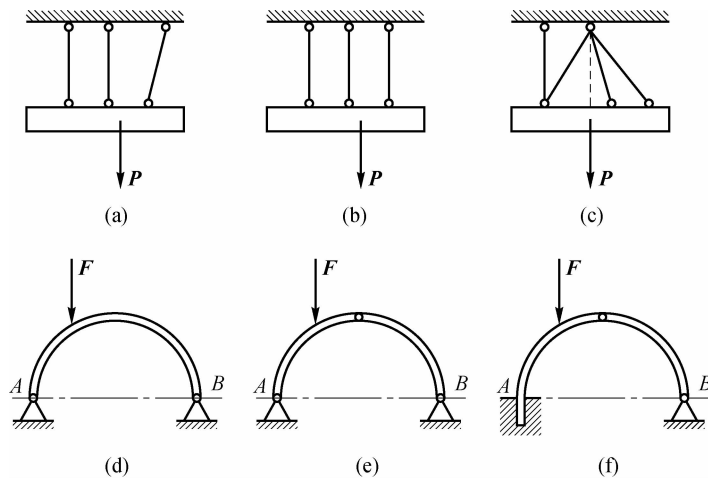


图 1-85 静定和超静定

6. 在粗糙的斜面上放置重物,当重物不下滑时,敲打斜面板,重物可能会下滑。试解释其原因。

7. 静摩擦因数与动摩擦因数是否一样? 为什么?

二、分析计算题

1. 在平板上作用 4 个力: $F_1=30\text{ N}$, $F_2=30\text{ N}$, $F_3=25\text{ N}$, $F_4=20\text{ N}$ 。各力的方向和作用位置如图 1-86 所示。求力系的合力。

2. 平行力系由 5 个力组成,力的大小和作用线的位置如图 1-87 所示。图中坐标的单位为 cm。求平行力系的合力。

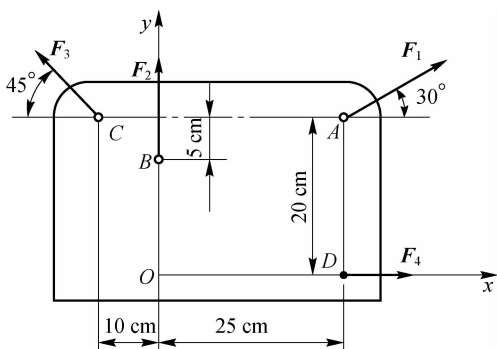


图 1-86 平板受力

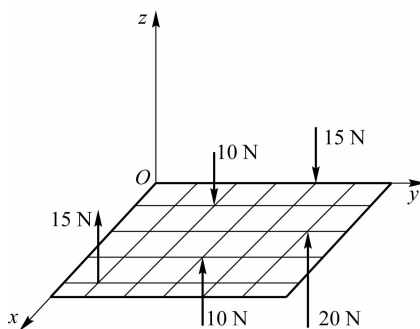


图 1-87 平行力系的合成

3. 三铰门式刚架受集中力 P 作用,不计架重。求如图 1-88 所示两种情况下支座 A、B 的约束力。

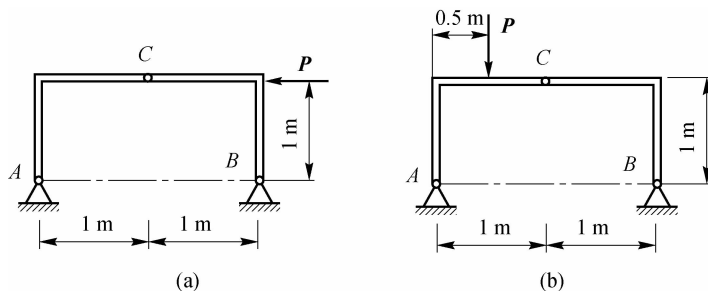


图 1-88 三铰门式刚架约束力

4. 如图 1-89 所示结构在点 D 作用一水平力 $P=2\text{ kN}$ 。求 A、B、C 处的约束力。

5. 求如图 1-90 所示物体的支座约束力,长度单位为 m。

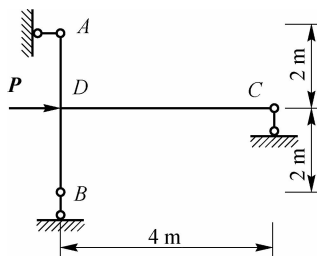


图 1-89 杆件约束力

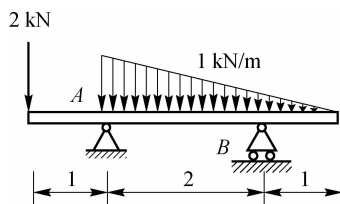


图 1-90 支座约束力

6. 如图 1-91 所示,用 3 根杆连接成一构架,各连接点均为铰链连接, B 处的接触表面光滑,不计各杆的重力,各段尺寸如图。求铰链 D 处的受力。

7. 如图 1-92 所示,起重机支架的杆 AB 、 AC 用铰链连接在可旋转的立柱上,并在 A 点用铰链互相连接。由绞车 D 水平引出钢索绕过滑轮 A 起吊重物。如物重 $G=20\text{ kN}$,滑轮的尺寸和各杆的自重忽略不计。试求杆 AB 和杆 AC 所受的力。

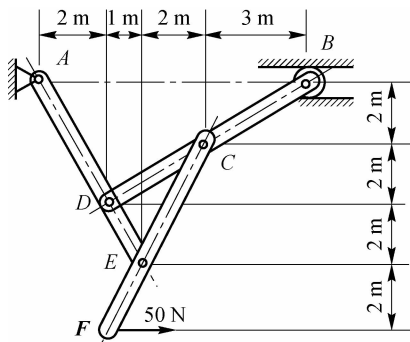


图 1-91 构架约束力

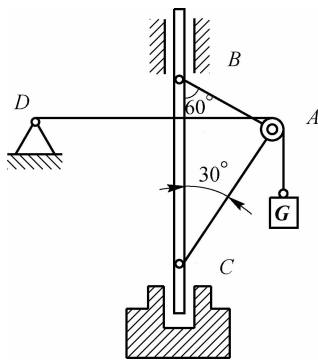


图 1-92 起重机支架

8. 三脚架如图 1-93 所示, $G=1\text{ kN}$, 试求支座 A 、 B 的约束力。

9. 如图 1-94 所示,已知物重 $G=10\text{ kN}$,其他重量不计,求铰链 A 的约束力和杆 BC 所受的力。

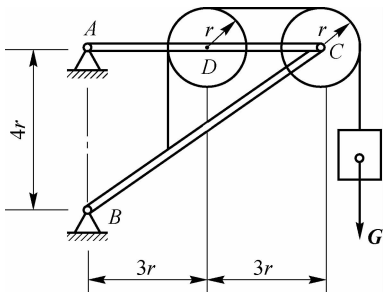


图 1-93 三脚架约束力

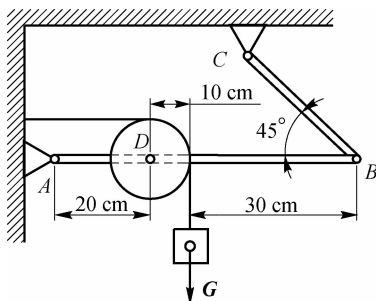


图 1-94 悬挂重物受力

10. 如图 1-95 所示,蒸汽锅炉的安全阀 A 与均质杠杆重 $P=9.8\text{ N}$, $OD=40\text{ cm}$, $OB=5\text{ cm}$,在 C 处悬挂平衡锤 $G=320\text{ N}$, 阀面积 $A=25\text{ cm}^2$ 。如欲使安全阀在气压大于 1.013 MPa 时自动开启,求 OC 长度。

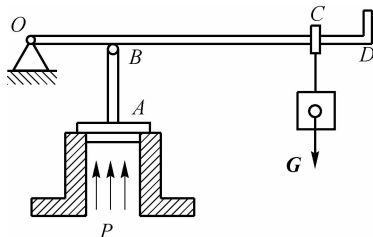


图 1-95 蒸汽锅炉

11. 悬臂吊车如图 1-96 所示, 横梁 AB 长 $l=2.5\text{ m}$, 重力 $W=1.2\text{ kN}$ 。拉杆 CD 延长线与 AB 梁相交于 B 点, 其倾斜角 $\alpha=30^\circ$, 重力不计。电葫芦连同重物重力 $G=7.5\text{ kN}$ 。试求当电葫芦在 $x=2\text{ m}$ 的位置时, 拉杆的拉力和铰链 A 的约束力。

12. 如图 1-97 所示, 构架由杆 AB 、 AC 和 DF 铰接而成, 在杆 DEF 上作用一力偶矩为 $M=60\text{ N}\cdot\text{m}$ 的力偶, $a=2\text{ m}$ 各杆重力不计, 求杆 AB 上铰链 A 、 D 和 B 的受力。

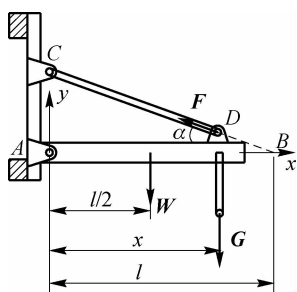


图 1-96 悬臂吊车

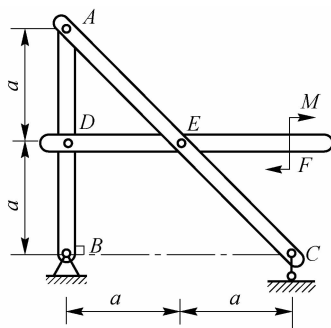


图 1-97 构架受力

13. 如图 1-98 所示, 组合梁由 AC 和 CD 两段铰接构成, 起重机放在梁上。已知起重机重 $P_1=80\text{ kN}$, 重心在铅直线 EC 上, 起重载荷 $P_2=20\text{ kN}$ 。如不计梁重, 求支座 A 、 B 、 D 三处的约束力。

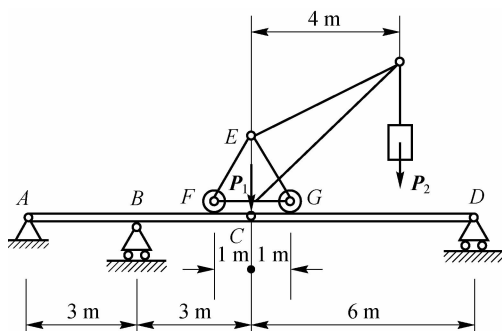


图 1-98 组合梁约束力

14. 如图 1-99 所示液压升降装置, 由平台和两个联动机构所组成, 联动机构上的液压缸承受相等的力(图中只画了一副联动机构和一个液压缸)。连杆 EDB 和 CG 长均为 $2a$, 杆端装有滚轮 B 和 C , 杆 AD 铰接于 EDB 的中点。举起重物 W 的一半由图示机构承受。设 $W=10\text{ kN}$, $a=2\text{ m}$, $l=6\text{ m}$, 求当 $\theta=60^\circ$ 时液压缸保持平衡所需的推力, 并说明所得的结果与距离 d 无关。

15. 如图 1-100 所示破碎机传动机构, 活动颚板 $AB=80\text{ cm}$, 设破碎时对颚板作用力垂直于 AB 方向的分力 $P=5\text{ kN}$, $AH=60\text{ cm}$, $BC=CD=80\text{ cm}$, $OE=20\text{ cm}$, 求图示位置时电机对杆 OE 作用的转矩 M 。

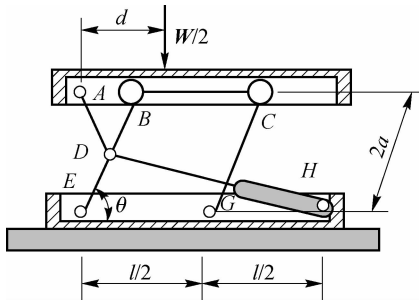


图 1-99 液压升降装置

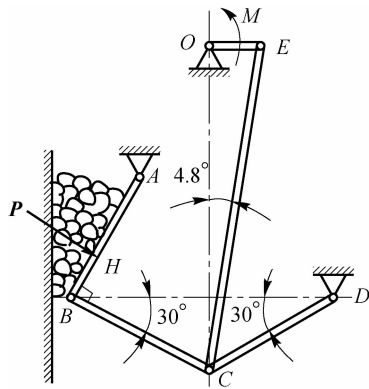


图 1-100 破碎机传动机构

16. 如图 1-101 所示结构由 AB、BC、CD、CE 四杆铰接而成, 已知力 F_1 处于铅垂方向, 力 F_2 沿水平方向。设杆长均为 l , 不计杆重, 试求杆 CE 所受的力。

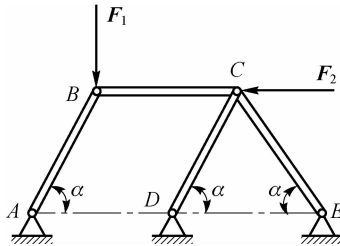


图 1-101 四杆铰接受力

17. 如图 1-102 所示, 由直角曲杆 ABC、DE, 直杆 CD 及滑轮组成的结构, 杆 AB 上作用有水平均布荷载 q , 在 D 处作用一铅垂力 F , 在滑轮上悬吊一重为 G 的重物, 滑轮的半径 $r=a$, 且 $G=2F$, $CO=OD$, 不计各构件的重量。试求支座 E 及固定端 A 的约束力。

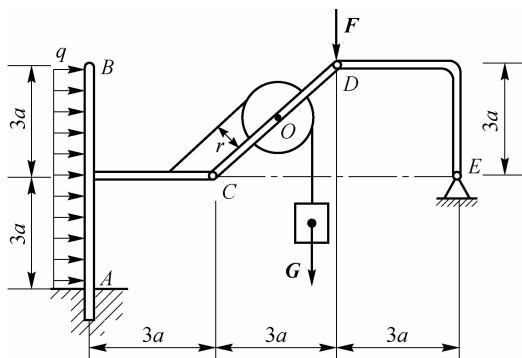


图 1-102 杆件滑轮结构

18. 如图 1-103 所示, 一重为 200 N 的梯子 AB 一端靠在铅垂的墙壁上, 另一端搁置在水平地面上, $\theta = \arctan 4/3$ 。假设梯子与墙壁间为光滑约束, 而与地面之间存在摩擦, 静摩擦因数 $f=0.5$ 。梯子是处于静止还是会滑倒, 此时摩擦力的大小为多少?

19. 如图 1-104 所示, 铁板重 2 kN , 其上压一重 5 kN 的重物, 拉住重物的绳索与水平面

成 30° 角, 现欲将铁板抽出。已知铁板和水平面间的摩擦因数 $f_1=0.20$, 重物和铁板间的摩擦因数 $f_2=0.25$, 求抽出铁板所需力 F 的最小值。

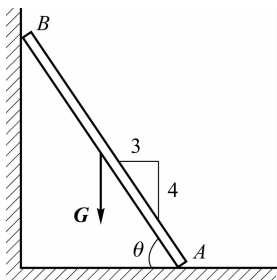


图 1-103 梯子摩擦力

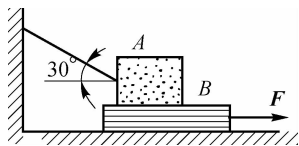


图 1-104 重物 and 铁板摩擦

任务五 空间力系平衡问题的求解



任务描述

图 1-105 所示为某水轮机涡轮转动轴, 已知大锥齿轮 D 上承受的啮合反力可以分解为圆周力 F_t 、轴向力 F_a 和径向力 F_r , 且它们的大小比为 $F_t : F_a : F_r = 1 : 0.32 : 0.17$, 外力偶矩 $M_z = 2 \text{ kN} \cdot \text{m}$, 转动轴及其附件总重量为 $G = 20 \text{ kN}$, 锥齿轮的平均半径为 $DE = r = 0.8 \text{ m}$, 其余尺寸如图所示, 试求两轴承处的约束力。



任务分析

了解空间力系简化的方法和结果, 能应用平衡条件求解空间汇交力系、空间平行力系、空间任意力系和空间力偶系的平衡问题。



知识准备

工程实际中, 刚体的受力除了平面力系外, 如果作用于物体上的力的作用线以及力偶的作用面不都在一个平面上, 则属于空间力系的作用。如果空间力系中各个力的作用线交于一点称为空间汇交力系; 如果所有力的作用线相互平行则称为空间平行力系; 如果一个物体受到多个力偶的作用, 而且这些力偶中至少有两个力偶的作用面不在一个平面上, 则称该力偶系为空间力偶系。力的作用线在空间任意分布的力系和空间力偶系统称为空间任意力系。

空间力系的分析方法与平面力系的分析方法是一样的。本任务重点研究空间力系的平衡方程及其应用。

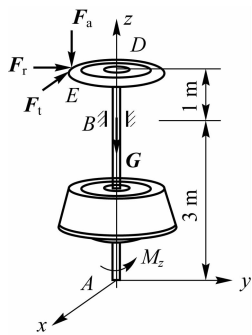


图 1-105 水轮机涡轮转动轴

一、常见的空间约束

任务一中介绍了工程中常见的几种平面约束。下面主要介绍几种常见的空间约束。

1. 球铰链约束



微课
常见的空间
约束

球铰链约束是用于空间问题中的约束,如图 1-106(a)所示。球窝给予球的约束力必通过球心,但可取空间任何方向。它能限制物体沿空间任何方向移动,但物体可以绕其球心任意转动。球铰链的约束力可分解为三个相互垂直的分力 F_x 、 F_y 、 F_z ,如图 1-106(b)所示。

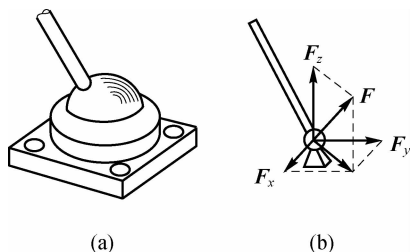


图 1-106 球铰链约束

2. 径向轴承约束

机器中的径向轴承是转轴的约束,它允许转轴转动,但限制转轴在垂直于轴线的任何方向的移动,如图 1-107(a)所示。径向轴承的简化如图 1-107(b)所示,其约束力可用垂直于轴线的两个相互垂直的分力来表示,如图 1-107(c)所示。

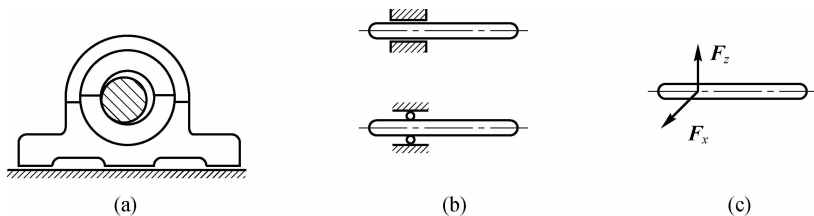


图 1-107 径向轴承约束

3. 止推轴承约束

止推轴承也是机器中常见的约束,如图 1-108(a)所示,止推轴承的简化如图 1-108(b)所示,与径向轴承不同之处是它还能限制转轴沿轴向的移动,其约束力增加了沿轴线方向的分力,如图 1-108(c)所示。

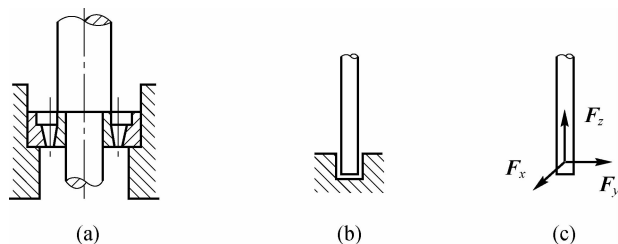


图 1-108 止推轴承约束

4. 空间固定端约束

如图 1-109(a)所示,空间固定端约束既能限制物体沿任何方向的移动,也能限制物体在约束处的转动,如房屋的凉台或车床的刀具夹持端等,固定端简化如图 1-109(b)所示,它们既不能转动也不能移动,所以既有三个方向的约束力,也有三个方向的约束力偶,如图 1-109(c)所示。

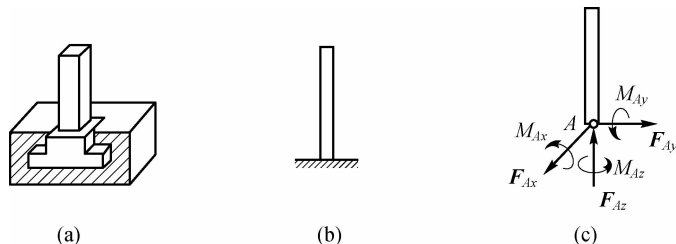


图 1-109 空间固定端约束

二、空间力系平衡问题的求解

1. 空间力系的简化

设物体上作用空间力系 F_1, F_2, \dots, F_n , 如图 1-110(a)所示。与平面任意力系的简化方法一样,在物体内任取一点 O 作为简化中心,依据力的平移定理,将图中各力平移到 O 点,加上相应的附加力偶,这样就可得到一个作用于简化中心 O 点的空间汇交力系和一个附加的空间力偶系,如图 1-110(b)所示。将作用于简化中心的汇交力系和附加的空间力偶系分别合成,便可以得到一个作用于简化中心 O 点的主矢 F'_R 和一个主矩 M_O ,如图 1-110(c)所示。

主矢 F'_R 的大小为

$$F_R = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2 + (\sum F_z)^2} \quad (1-42)$$

主矩 M_O 的大小为

$$M_O = \sqrt{[\sum M_x(\mathbf{F})]^2 + [\sum M_y(\mathbf{F})]^2 + [\sum M_z(\mathbf{F})]^2} \quad (1-43)$$

即原力系中各力对于简化中心之矩的代数和。

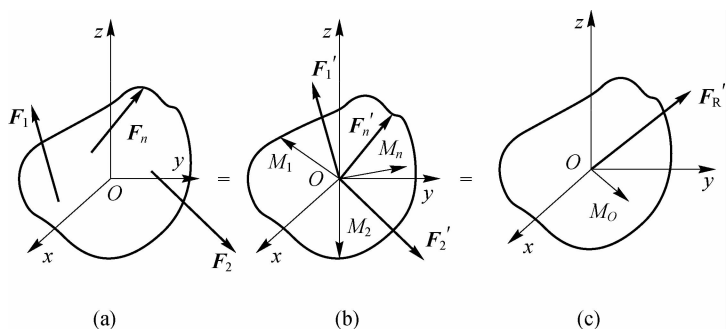


图 1-110 空间力系的简化

2. 空间力系的平衡方程及其应用

若空间任意力系平衡,如图 1-111(a)所示,则力系中各力的矢量和与各力对于简化中心之矩的代数和均为零。因此得到

$$\sum F_x = 0, \sum F_y = 0, \sum F_z = 0 \quad (1-44)$$

$$\sum M_x(\mathbf{F}) = 0, \sum M_y(\mathbf{F}) = 0, \sum M_z(\mathbf{F}) = 0 \quad (1-45)$$

由此可知,空间任意力系平衡的必要和充分条件是力系中所有各力在任意相互垂直的三个坐标轴的每一个轴上的投影的代数和等于零,以及力系对于这三个坐标轴的矩的代数和分别等于零。

空间任意力系有 6 个独立的平衡方程,所以空间任意力系问题至多可解 6 个未知量。空间力系还存在如下两种特殊情况。

(1)空间汇交力系。各力的作用线汇交于一点的空间力系称为空间汇交力系,如图 1-111(b)所示。若以汇交点为原点,取直角坐标系 $Oxyz$,由于各力与三个坐标轴都相交,式(1-45)中的三个力矩方程自然得到满足,所以空间汇交力系的平衡方程只有三个,即

$$\sum F_x = 0, \sum F_y = 0, \sum F_z = 0 \quad (1-46)$$

(2)空间平行力系。各力作用线互相平行的空间力系称为空间平行力系,如图 1-111(c)所示。取坐标系 $Oxyz$,令 z 轴与力系中各力平行,则不论力系是否平衡,都自然满足 $\sum F_x = 0, \sum F_y = 0, \sum M_z(\mathbf{F}) = 0$ 。于是空间平行力系的平衡方程为

$$\sum F_z = 0, \sum M_x(\mathbf{F}) = 0, \sum M_y(\mathbf{F}) = 0 \quad (1-47)$$

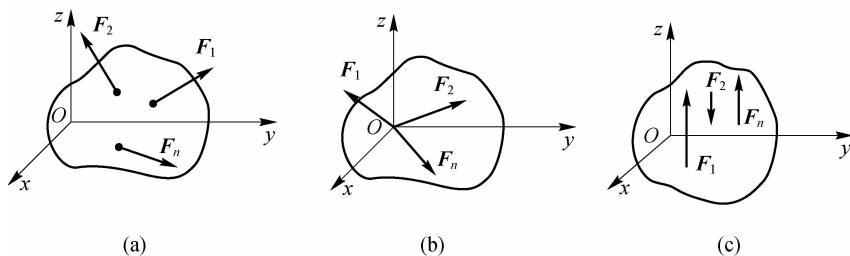


图 1-111 空间任意力系平衡

例 1-18 如图 1-112 所示,已知镗刀杆的刀头上受切削力 $F_z = 1\ 000\ \text{N}$,径向力 $F_x = 300\ \text{N}$,轴向力 $F_y = 150\ \text{N}$ 的作用,刀尖位于 Oxy 平面内,其坐标 $x = 75\ \text{mm}, y = 200\ \text{mm}$ 。工件重量不计,求被切削工件左端 O 处的约束力。

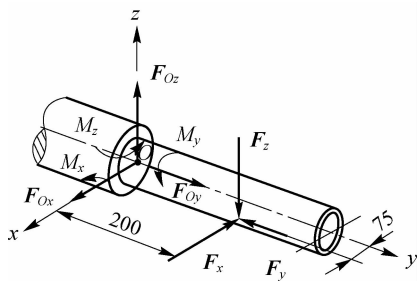


图 1-112 镗刀杆

解:(1)取镗刀杆为研究对象。

(2)受力和画受力图。镗刀杆根部是固定端约束,由于镗刀杆受的主动动力是空间力系,因此当镗刀杆平衡时,固定端的约束力也是一个空间力系,将此力系向点 O 简化,得到一约束力和一约束力偶。约束力用直角坐标轴的三个分量 F_{Ox} 、 F_{Oy} 、 F_{Oz} 表示,约束力偶用三个正交分力偶矩 M_x 、 M_y 、 M_z 表示,见图 1-112。

(3)列平衡方程得

$$\sum F_x = 0, -F_x + F_{Ox} = 0$$

$$\sum F_y = 0, -F_y + F_{Oy} = 0$$

$$\sum F_z = 0, -F_z + F_{Oz} = 0$$

$$\sum M_x(\mathbf{F}) = 0, -F_z \times 0.2 + M_x = 0$$

$$\sum M_y(\mathbf{F}) = 0, F_y \times 0.075 + M_y = 0$$

$$\sum M_z(\mathbf{F}) = 0, F_x \times 0.2 - F_y \times 0.075 + M_z = 0$$

解得 $F_{Ox} = 300 \text{ N}$, $F_{Oy} = 150 \text{ N}$, $F_{Oz} = 1\ 000 \text{ N}$, $M_x = 200 \text{ N} \cdot \text{m}$, $M_y = -11.25 \text{ N} \cdot \text{m}$, $M_z = -48.75 \text{ N} \cdot \text{m}$ 。

所求结果 M_y 和 M_z 为负值,表示力偶矩的实际方向与图示方向相反。

例 1-19 传动轴如图 1-113 所示,以 A 、 B 两轴承支承。圆柱直齿轮的节圆直径 $d=30 \text{ mm}$,压力角 $\alpha=20^\circ$,在法兰盘上作用一力偶,其力偶矩 $M=1\ 000 \text{ N} \cdot \text{m}$ 。如轮轴自重和摩擦不计,求传动轴匀速转动时 A 、 B 两轴承的约束力及齿轮所受的啮合力 \mathbf{F} 。

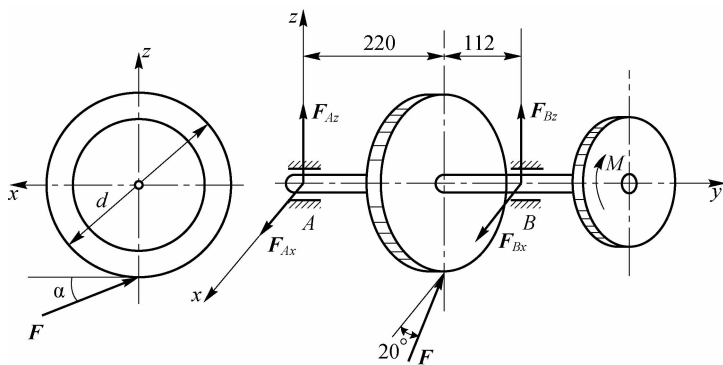


图 1-113 传动轴

解:(1)取整个轴为研究对象。

(2)受力和画受力图。设 A 、 B 两轴承的约束力分别为 F_{Ax} 、 F_{Az} 、 F_{Bx} 、 F_{Bz} ,并沿 x 、 z 轴的正向,此外还有力偶 M 和齿轮所受的啮合力 \mathbf{F} ,这些力构成空间任意力系。

(3)取坐标轴如图 1-113 所示,列平衡方程如下

$$\sum M_x(\mathbf{F}) = 0, F \sin 20^\circ \times 220 + F_{Bz} \times 332 = 0$$

$$\sum M_y(\mathbf{F}) = 0, -M + F \cos 20^\circ \times \frac{d}{2} = 0$$

$$\sum M_z(\mathbf{F}) = 0, -F_{Bz} \times 332 + F \cos 20^\circ \times 220 = 0$$

$$\sum F_x = 0, F_{Ax} + F_{Bx} - F \cos 20^\circ = 0$$

$$\sum F_z = 0, F_{Az} + F_{Bz} + F \sin 20^\circ = 0$$

联立求解以上各式,解得 $F = 12.67 \text{ kN}$, $F_{Bz} = -2.87 \text{ kN}$, $F_{Bx} = 7.89 \text{ kN}$, $F_{Ax} = 4.02 \text{ kN}$, $F_{Az} = -1.46 \text{ kN}$ 。

3. 空间力系平衡问题的平面解法

当空间任意力系平衡时,它在任意平面上的投影所组成的平面任意力系也是平衡的。因而在工程中,为了求解空间力系的平衡问题,常把受空间力系作用物体的受力图投影到三个坐标平面上,作出相应的三个视图,得到三个平面力系,然后分别列出其平衡方程,即可解出未知量。这种将空间问题转化为平面问题的研究方法,称为空间问题的平面解法。这种方法特别适用于受力较多的轴类构件。

在空间力系平衡问题的平面解法中三个视图上的力是相互联系的,其中一个视图解出的未知量可以作为另外两个视图的已知量。从这种意义上讲,可以把受空间力系作用的物体视为由三个视图组成的物系。因此其解题方法与注意事项与物系平衡基本相同。

下面通过例题具体介绍空间力系平衡问题的平面解法。

例 1-20 带式输送机传动系统中的从动齿轮轴如图 1-114(a)所示。已知齿轮的分度圆直径 $d=280 \text{ mm}$,轴的跨距 $L=105 \text{ mm}$,悬臂长度 $L_1=110.5 \text{ mm}$,圆周力 $F_t=1\ 200 \text{ N}$,径向力 $F_r=460 \text{ N}$,不计自重。求轴承 A、B 的约束力和联轴器所受转矩 M_T 。

解: (1)取轮轴为研究对象。

(2)画受力图并将其向三个坐标平面投影,如图 1-114(b)~图 1-114(d)所示。

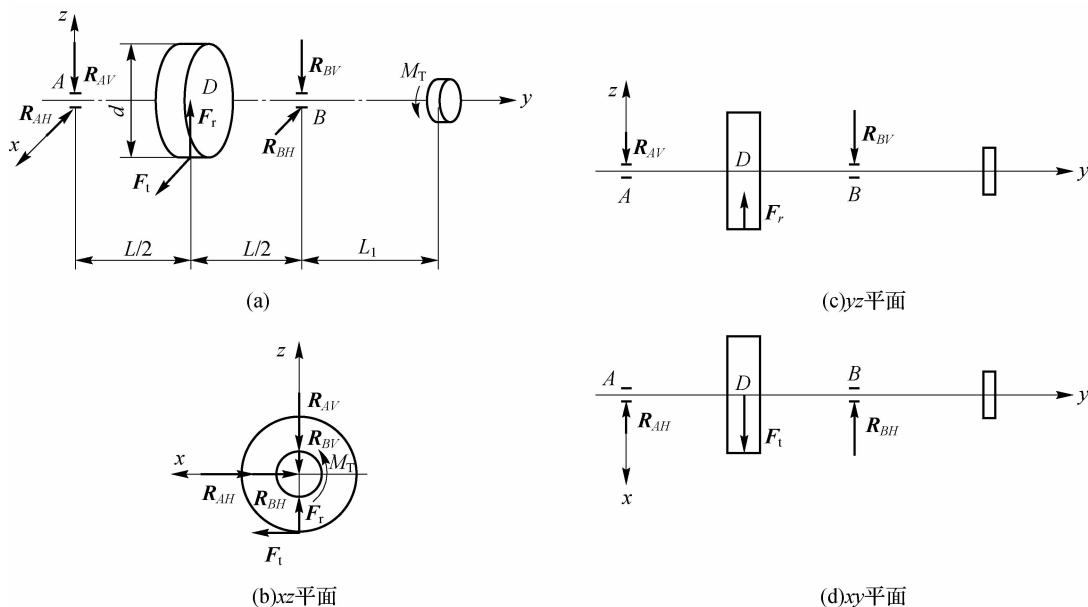


图 1-114 带式输送机传动系统

(3)分别对三个投影列平衡方程求解。

对 xz 平面

$$\sum M_A(\mathbf{F}) = 0, M_T - \frac{d}{2}F_t = 0$$

解得 $M_T = \frac{d}{2}F_t = 168\,000 \text{ N} \cdot \text{mm}$ 。

对 yz 平面

$$\sum M_A(\mathbf{F}) = 0, \frac{L}{2}F_r - LR_{BV} = 0$$

$$\sum F_z = 0, -R_{AV} + F_r - R_{BV} = 0$$

解得 $R_{BV} = \frac{F_r}{2} = 230 \text{ N}$, $R_{AV} = F_r - R_{BV} = 230 \text{ N}$ 。

对 xy 平面

$$\sum M_A(\mathbf{F}) = 0, -\frac{L}{2}F_t + LR_{BH} = 0$$

$$\sum F_x = 0, -R_{BH} + F_t - R_{BH} = 0$$

解得 $R_{BH} = \frac{F_t}{2} = 600 \text{ N}$, $R_{AH} = F_t - R_{BH} = 600 \text{ N}$ 。

三、物体的重心

在工程中,物体重心的位置具有重要意义。例如,挡土墙、重力坝和起重机的抗倾覆稳定性问题,都与它们的重心位置有关。高速运转部件的重心如果不在轴线上,将引起机械的剧烈振动,因此必须了解重心的概念和重心位置的求法。

地面上的一切物体都受到地球的重力作用,物体是由许多微小部分组成的,可以把物体各部分的重力看成是铅直向下相互平行的空间平行力系,这个平行力系的合力的大小即为物体的重量,合力的作用点即为物体的重心。

1. 物体重心和形心的坐标公式

如图 1-115 所示,将物体分成 n 份微小部分,各微小部分的重力以 $\Delta W_1, \Delta W_2, \dots, \Delta W_n$ 表示,各微小部分作用点的坐标分别为 $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \dots, (x_n, y_n, z_n)$,物重 W 的值为 $W = \sum_{i=1}^n \Delta W_i, i = 1, 2, \dots, n$ 。重心的坐标用 (x_C, y_C, z_C) 表示,根据合力矩定理,对 x 轴取矩

$$\begin{aligned} M_x(\sum \Delta \mathbf{W}) &= \Delta W_1 \cdot y_1 + \Delta W_2 \cdot y_2 + \dots + \Delta W_n \cdot y_n \\ &= \sum \Delta W_i \cdot y_i \end{aligned}$$

$$M_x(W) = \sum \Delta W_i \cdot y_C = W \cdot y_C$$

因

$$W \cdot y_C = \sum \Delta W_i \cdot y_i$$

则

$$y_C = \frac{\sum \Delta W_i \cdot y_i}{W} = \frac{\sum \Delta W_i \cdot y_i}{\sum \Delta W_i}$$

同理

$$x_c = \frac{\sum \Delta W_i \cdot x_i}{W} = \frac{\sum \Delta W_i \cdot x_i}{\sum \Delta W_i}$$

$$z_c = \frac{\sum \Delta W_i \cdot z_i}{W} = \frac{\sum \Delta W_i \cdot z_i}{\sum \Delta W_i}$$

若物体为均质,其密度为 ρ ,将 $W = \rho g V, \Delta W_i = \rho g \Delta V_i$ 代入上式,令 $\Delta V_i \rightarrow 0$ 取极限,可得

$$\left. \begin{aligned} x_c &= \frac{\sum x_i \Delta V_i}{V} = \frac{\int_V x dV}{V} \\ y_c &= \frac{\sum y_i \Delta V_i}{V} = \frac{\int_V y dV}{V} \\ z_c &= \frac{\sum z_i \Delta V_i}{V} = \frac{\int_V z dV}{V} \end{aligned} \right\} \quad (1-48)$$

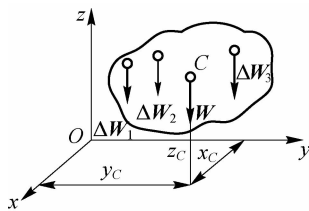


图 1-115 重心和形心

可见均质物体的重心位置完全取决于物体的几何形状,而与物体的重量无关,因此均质物体的重心也称为形心。式(1-48)称为体积形心坐标公式。

注意

重心和物体的几何形状的形心是两个不同的概念,只有均质物体的重心和形心才重合于一点。

工程实际中常采用匀质、等厚度的薄板、薄壳结构形成一种面形形体。例如厂房的双曲顶壳、薄壁容器和飞机机翼等。以 A 表示壳或板的表面面积, ΔA_i 表示微小部分的面积,同理可求得均质薄壳的重心或形心 C 的位置坐标公式为

$$\left. \begin{aligned} x_c &= \frac{\sum x_i \Delta A_i}{A} = \frac{\int_A x dA}{A} \\ y_c &= \frac{\sum y_i \Delta A_i}{A} = \frac{\int_A y dA}{A} \\ z_c &= \frac{\sum z_i \Delta A_i}{A} = \frac{\int_A z dA}{A} \end{aligned} \right\} \quad (1-49)$$

对于匀质线段如等截面匀质细长曲杆、细金属丝,可以视为匀质空间曲线,如图 1-116 所示。

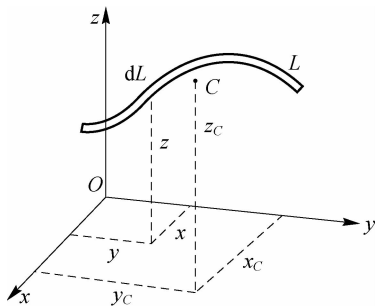


图 1-116 匀质线段

以 L 表示细杆的长度, ΔL_i 表示微小部分的长度, 同样可求得细杆的重心或形心 C 的位置坐标公式为

$$\left. \begin{aligned} x_c &= \frac{\sum x_i \Delta L_i}{L} = \frac{\int_L x dL}{L} \\ y_c &= \frac{\sum y_i \Delta L_i}{L} = \frac{\int_L y dL}{L} \\ z_c &= \frac{\sum z_i \Delta L_i}{L} = \frac{\int_L z dL}{L} \end{aligned} \right\} \quad (1-50)$$

2. 物体重心与形心的计算

根据物体的具体形状及特征, 可用不同的方法确定其重心及形心的位置。

1) 对称法

对于形状比较规则的物体及图形, 其重心及形心可根据对称性直接判断, 如图 1-117 所示。

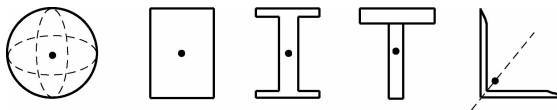


图 1-117 规则物体重心和形心

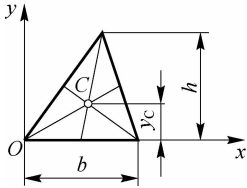
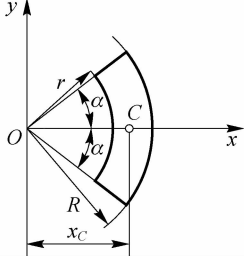
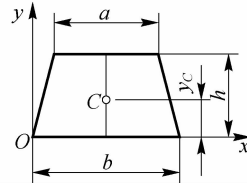
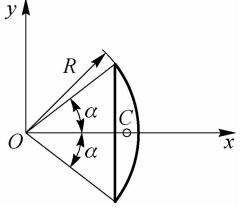
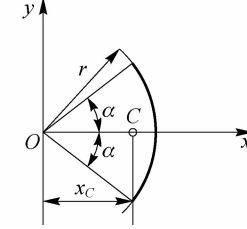
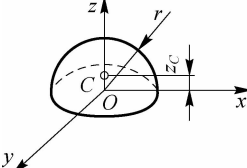
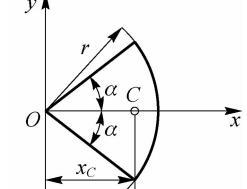
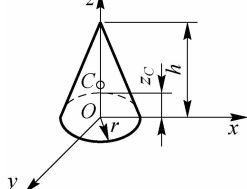
- (1) 具有一根对称轴的简单物体及图形, 其形心必在对称轴上。
- (2) 具有两根或两根以上对称轴的物体及图形, 其形心在对称轴的交点上。
- (3) 中心对称的简单物体及图形, 其对称中心便是重心或形心。

2) 积分法

求基本规则形体的形心, 可将形体分割成无限多个微小形体, 在此极限情况下, 利用形心的积分公式(1-48)、式(1-49)及式(1-50)求得。

对于常用的一些简单图形和物体的重心位置可从工程手册中查得。现将几种常用简单形状均质物体的重心列于表 1-1, 供参考。

表 1-1 常用简单形状均质物体的重心

图 形	重心位置	图 形	重心位置
<p>三角形</p> 	<p>在中线交点上</p> $y_C = \frac{1}{3}h$	<p>部分圆形</p> 	$x_C = \frac{2(R^3 - r^3) \sin \alpha}{3(R^2 - r^2)\alpha}$
<p>梯形</p> 	<p>在上、下底中点的连线上</p> $y_C = \frac{h(2a+b)}{3(a+b)}$	<p>弓形</p> 	$x_C = \frac{4R \sin^3 \alpha}{3(2\alpha - \sin 2\alpha)}$
<p>圆弧</p> 	$x_C = \frac{r \sin \alpha}{\alpha}$ <p>半圆弧: $\alpha = \frac{\pi}{2}$</p> $x_C = \frac{2r}{\pi}$	<p>半圆球</p> 	$z_C = \frac{3}{8}r$
<p>扇形</p> 	$x_C = \frac{2r \sin \alpha}{3\alpha}$ <p>半圆: $\alpha = \frac{\pi}{2}$</p> $x_C = \frac{4r}{3\pi}$	<p>正圆锥体</p> 	$z_C = \frac{1}{4}h$

3) 组合法

工程实际中,有些物体的截面是由若干个简单图形组成的,例如梯形可以认为是由两个三角形或一个矩形和一个三角形组成的,这种图形称为组合图形,截面称为组合截面。由于简单形体重心位置根据对称性或查表很容易确定,因而可将组合形体分割为若干的简单几何形体,然后应用形心公式求出组合形体的重心位置。

4) 负面积法

在规则形体上切去一部分,如钻孔或开槽等。当求这类形体的形心时,首先认为原形体是完整的,然后把切去的部分视为负面积,再运用形心公式求出形心。负面积法可以认为是

形体组合法的推广。

5) 试验法

对于某些形状复杂的机械零部件,在工程实际中常采用试验法来测定其重心。试验法往往比计算直接、简便,并具有足够的准确性。常用的试验法有两种。

(1) 悬挂法。对于形状复杂的薄平板求形心时可以采用悬挂法。如图 1-118 所示,首先将板悬挂于任一点 A ,则可以判断薄平板的形心在绳子向下的延长线 AD 上。然后将薄平板悬挂于另一点 B ,其形心在绳子向下的延长线 BE 上。显然, AD 与 BE 的交点即为薄平板的形心 C 。

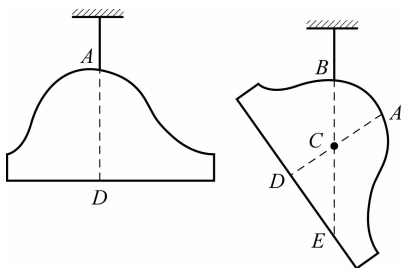


图 1-118 悬挂法

(2) 称重法。形状复杂或体积庞大的物体,可以采用称重法求重心。例如内燃机的连杆,如图 1-119 所示,其重心必在对称中心线 AB 上,只需确定重心在中心线 AB 上的确切位置。将连杆的小端 A 放在水平面上,大端 B 放在台秤上,使中心线 AB 处于水平位置。

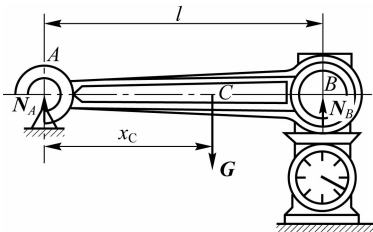


图 1-119 称重法

已知连杆重力为 G ,小头支承点距重力 G 的作用线的距离为 x_C ,由力矩平衡方程

$$\sum M_A = 0, N_B l - G x_C = 0$$

可得

$$x_C = \frac{N_B l}{G}$$

式中, l 为连杆大、小头支承点间的距离(m); G 为重力(N),可以直接测得; B 端的反力 N_B 的大小可由台秤读出,从而求出 x_C 的值。

为了便于测量和减少误差, A 、 B 支承处的接触面积要尽量小,可做成刃口形状。摩托车、汽车、各类机床等的重心位置可以用称重法确定。

例 1-21 已知振动器用的偏心块为等厚度的匀质体,如图 1-120 所示。其上有半径为 r_2 的圆孔。偏心块的几何尺寸 $R=210$ mm, $r_1=60$ mm, $r_2=30$ mm。试求偏心块形心的位置。



视频
悬挂法确定
重心

解:该偏心块可以看作由三部分组成:大半圆、小半圆和一个圆孔,挖空的圆孔可视为负面积。取坐标系 Oxy ,其中 Oy 轴为对称轴。根据对称性,偏心块的形心 C 必在对称轴 Oy 上,所以 $x_c=0$ 。

半径为 R 的大半圆的面积 $A_1 = \frac{1}{2} \pi R^2 = 22\,050\pi \text{ mm}^2$,

查表 1-1 得到形心坐标 $y_1 = \frac{4R}{3\pi} = \frac{280}{\pi} \text{ mm}$ 。

半径为 r_1 的小半圆的面积 $A_2 = \frac{1}{2} \pi r_1^2 = 1\,800\pi \text{ mm}^2$,

查表 1-1 得到形心坐标 $y_2 = -\frac{4r_1}{3\pi} = -\frac{120}{\pi} \text{ mm}$ 。

半径为 r_2 的小圆的面积 $A_3 = \pi r_2^2 = 900\pi \text{ mm}^2$,由对称法,可知形心坐标 $y_3=0$ 。

将上面的结果代入式(1-49)可得到形心坐标:

$$y_c = \frac{\sum y_i \Delta A_i}{A} = \frac{22\,050\pi \cdot \frac{280}{\pi} - 1\,800\pi \cdot \frac{120}{\pi} - 900\pi \cdot 0}{22\,050\pi + 1\,800\pi - 900\pi} = 82.68 \text{ mm}$$

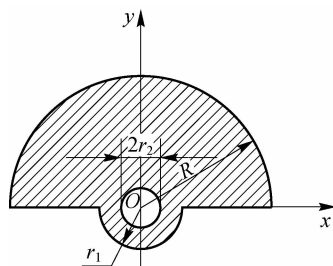


图 1-120 偏心块形心



任务实施

空间力系平衡问题的求解——求图 1-121(a)中 A 、 B 两处的约束力。

解:(1)取整体系统为研究对象。

(2)受力和画受力图。如图 1-121(b),将两个轴承处的约束力进行分解, A 处为固定铰支座,其受力可分解为 F_{Ax} 、 F_{Ay} 和 F_{Az} , B 处可视为圆柱铰,其受力可分解为 F_{Bx} 和 F_{By} ,另外齿轮上还受到 F_t 、 F_r 和 F_a 以及外力偶矩 M_z 的作用。

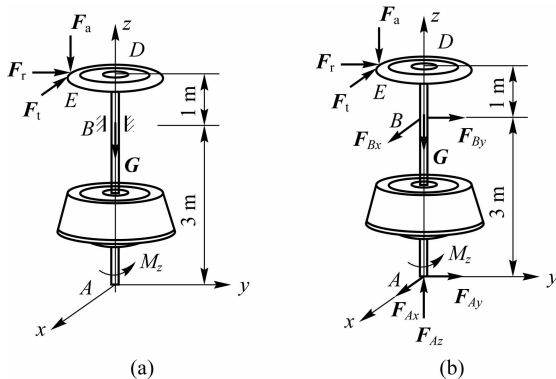


图 1-121 水轮机涡轮转动轴

(3)列平衡方程求解。共有 8 个未知力,但由于大锥齿轮 D 上承受的啮合反力 3 个分力存在比例关系,相当于补充了两个方程,于是可以建立力的平衡方程如下

$$\sum F_x = 0, F_{Ax} + F_{Bx} - F_t = 0$$

$$\sum F_y = 0, F_{Ay} + F_{By} + F_r = 0$$

$$\begin{aligned} \sum F_z &= 0, F_{Az} - F_a - G = 0 \\ \sum M_x &= 0, F_a \times 0.8 - F_r \times 4 - F_{By} \times 3 = 0 \\ \sum M_y &= 0, F_{Bx} \times 3 - F_t \times 4 = 0 \\ \sum M_z &= 0, M_z - F_t \times 0.8 = 0 \\ F_t : F_a : F_r &= 1 : 0.32 : 0.17 \end{aligned}$$

解得 $F_{Ax} = -8.33 \text{ kN}$, $F_{Ay} = 31.08 \text{ kN}$, $F_{Az} = 28 \text{ kN}$, $F_{Bx} = 33.33 \text{ kN}$, $F_{By} = -35.33 \text{ kN}$,
 $F_t = 25 \text{ kN}$, $F_a = 8 \text{ kN}$, $F_r = 4.25 \text{ kN}$ 。



思考与练习

一、简答题

1. 空间任意力系总可以用两个力来平衡,为什么?
2. 空间任意力系向三个相互垂直的坐标平面投影,得到三个平面任意力系。为什么其独立的平衡方程数只有 6 个?
3. 若空间力系中各力的作用线平行于某一固定平面,空间力系中各力的作用线分别汇交于两个固定点,试分析这两种力系各有几个平衡方程。
4. 传动轴用两个止推轴承支承,每个轴承有 3 个未知力,共 6 个未知量,而空间任意力系的平衡方程恰好有 6 个,问是否可解?
5. 空间任意力系的平衡方程能否用 6 个力矩方程? 如何选取这 6 个力矩轴?
6. 物体的重心和形心坐标是否相同? 为什么?
7. 物体的重心是否一定在该物体上?
8. 一均质等截面直杆的重心在哪? 若把它弯成半圆形,重心的位置是否改变?

二、分析计算题

1. 三轮小车自重 $W=10 \text{ kN}$, 作用于点 C , 载荷 $F=15 \text{ kN}$, 作用于点 E , 如图 1-122 所示。求小车静止时地面对车轮的反力。

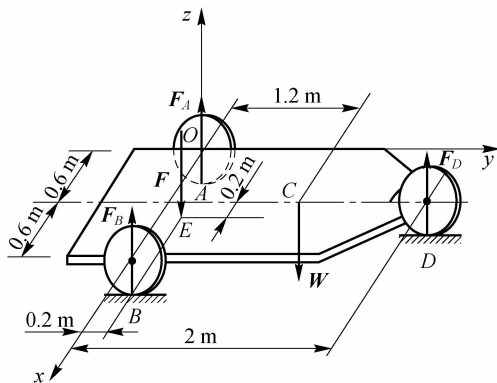


图 1-122 三轮小车

7. 如图 1-128 所示均质物体由半径为 r 的圆柱体和半径为 r 的半球体相结合而组成。如均质物体的重心位于半球体的大圆的中心点 C 处, 求圆柱体的高。

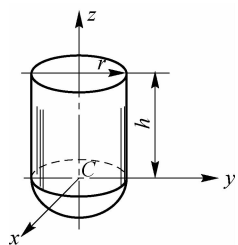


图 1-128 圆柱半球体均质物体

8. 如图 1-129 所示均质物体由圆锥体和半球体相结合而组成, 半球体的半径和圆锥体底圆半径均为 r 。如均质物体的重心在球体和圆锥体的交界面的中心点 C , 求圆锥体的高 h 。

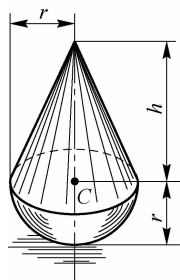


图 1-129 圆锥半球体均质物体

9. 如图 1-130 所示为一脚踏拉杆装置, 若已知 $F_D = 500 \text{ N}$, $AB = 40 \text{ cm}$, $AC = CD = 20 \text{ cm}$, $HC = EH = 10 \text{ cm}$, 拉杆与水平面成 30° 角。求拉杆的拉力 F 和 A 、 B 两轴承的约束力。

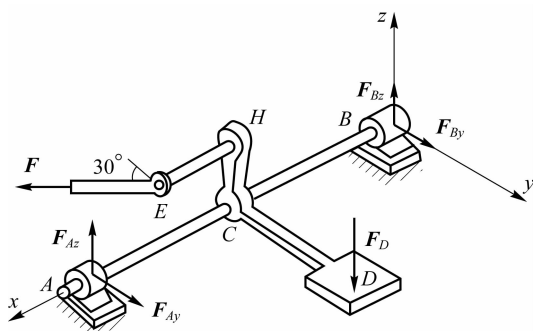


图 1-130 脚踏拉杆装置

10. 如图 1-131 所示, 均质长方形薄板重 $W = 200 \text{ N}$, 用球铰链 A 和蝶铰链 B 固定在墙上, 并用绳子 CE 维持在水平位置。求绳子的拉力和支座约束力。

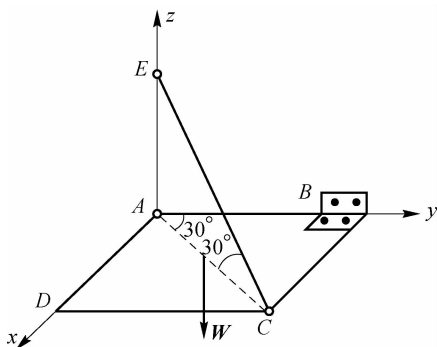


图 1-131 长方形薄板

11. 变速箱中间轴装有两直齿圆柱齿轮, 其分度圆半径 $r_1 = 100 \text{ mm}$, $r_2 = 72 \text{ mm}$, 啮合点分别在两齿轮的最低与最高位置, 如图 1-132 所示。图中的尺寸单位为 mm 。已知齿轮压力角 $\alpha = 20^\circ$ 。在齿轮 1 上的圆周力 $F_1 = 1.58 \text{ kN}$ 。试求当轴平衡时作用于齿轮 2 上的圆周力 F_2 与轴承 A 、 B 的约束力。

12. 如图 1-133 所示, 轴上装有直齿圆柱齿轮和直齿圆锥齿轮。圆柱齿轮 C 的分度圆直径 $D_1 = 200 \text{ mm}$, 其上作用有圆周力 $F_{t1} = 7.16 \text{ kN}$, 径向力 $F_{r1} = 2.6 \text{ kN}$, 圆锥齿轮在其平均直径处(平均直径 $D_2 = 100 \text{ mm}$)作用有径向力 $F_{r2} = 4.52 \text{ kN}$, 轴向力 $F_{a2} = 2.6 \text{ kN}$, 圆周力 F_{t2} 。若已知 $AC = CB = BD = 100 \text{ mm}$, 求圆周力 F_{t2} 和轴承 A 、 B 的约束力。

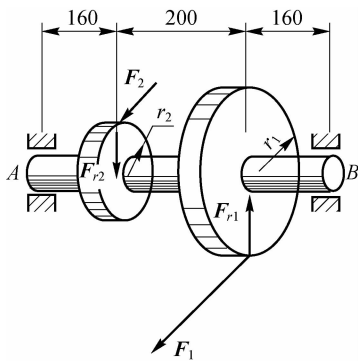


图 1-132 水平传动轴

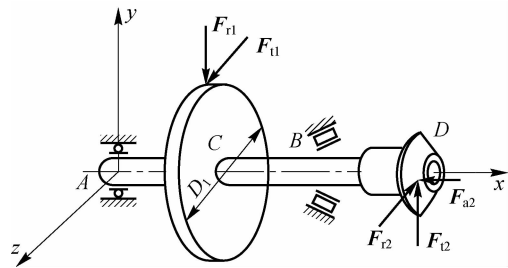


图 1-133 齿轮传动轴

13. 如图 1-134 所示, 铰车的轴 AB 上绕有绳子, 绳上挂物重 Q 。轮 C 装在轴上, 轮的半径为轴半径的 6 倍。绕在轮 C 上的绳子沿轮与水平线成 30° 角的切线引出, 绳跨过轮 D 后挂以重物 $P=60\text{ N}$ 。求平衡时物重 Q , 以及轴承 A 、 B 的约束力。各轮和轴的重量以及绳与滑轮 D 的摩擦均略去不计。

14. 某减速箱由 3 轴组成, 如图 1-135 所示, 动力由轴 I 输入, 在轴 I 上作用转矩 $M_1=600\text{ N}\cdot\text{m}$ 。如齿轮分度圆直径为 $D_1=120\text{ mm}$, $D_2=550\text{ mm}$, $D_3=200\text{ mm}$, 齿轮压力角为 20° 。不计摩擦及轮和轴重量, 求等速传动时轴承 A 、 B 、 C 、 D 的约束力。

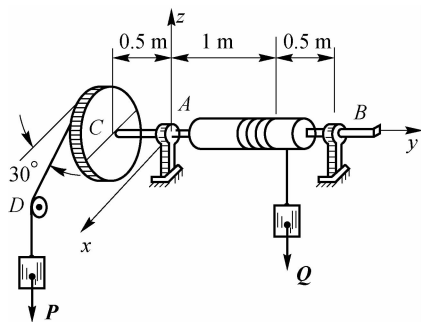


图 1-134 铰车轴

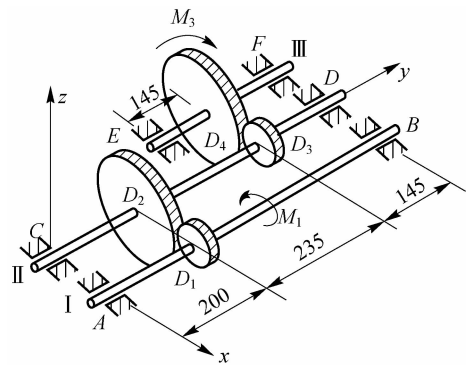


图 1-135 三轴减速箱

学习目标

掌握构件基本变形形式,正确理解内力和应力的基本概念,熟练掌握截面法求解内力;

掌握构件基本变形时横截面的内力和应力分析及计算方法,并熟练绘制其内力图;

掌握构件基本变形的强度和刚度计算;

掌握材料力学性能的基本参数,并熟练掌握常见脆、塑性材料的力学性能;

掌握组合变形的基本概念及分析方法;

掌握细长杆的稳定性概念及临界力和临界应力的求法。

任务一 轴向拉伸与压缩变形时的承载能力计算



任务描述

如图 2-1 所示的起重设备结构中,钢杆 AB 为直径 50 mm 的圆杆,钢杆 BC 为 50 mm × 40 mm 的矩形截面杆,材料的许用应力为 100 MPa。

- (1)若载荷 $F=200$ kN,试校核杆 AB 和杆 BC 的强度。
- (2)求许可载荷 $[F]$ 。

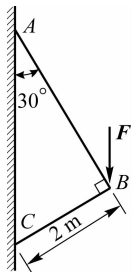


图 2-1 杆件结构图



任务分析

掌握典型构件轴向拉伸与压缩变形时的强度计算。



知识准备

材料力学是研究构件受力变形和破坏规律的科学。构件在工作时要受到外力作用,若保证构件在正常工作时有足够的承载能力,构件需要具有足够的强度、刚度及稳定性,材料力学为构件的设计提供了强度、刚度和稳定性的计算依据,使设计的构件经济、安全、合理。

在工程中,构件在外力作用下有 4 种基本变形形式,包括轴向拉伸与压缩变形、剪切与挤压变形、扭转变形和弯曲变形。本任务重点研究轴向拉伸与压缩变形的内力和应力的基本概念及计算,材料的力学性能及测定,轴向拉压的变形及强度计算。

一、轴向拉伸与压缩变形概念

工程中很多构件承受拉伸或压缩,例如液压传动机构的活塞杆,压缩机和蒸汽机的连杆;千斤顶的螺杆,如图 2-2(a)所示;工业厂房的中柱;桁架结构(如桁式桥梁、高耸建筑、屋架、发射塔、输电塔、塔式起重机的塔架和吊臂等)中的铰接杆,如图 2-2(b)、(c)所示;内燃机的挺杆,如图 2-2(d)所示;大型机加工和起重设备(如水压机、龙门式机床、门式起重机等)的立柱。

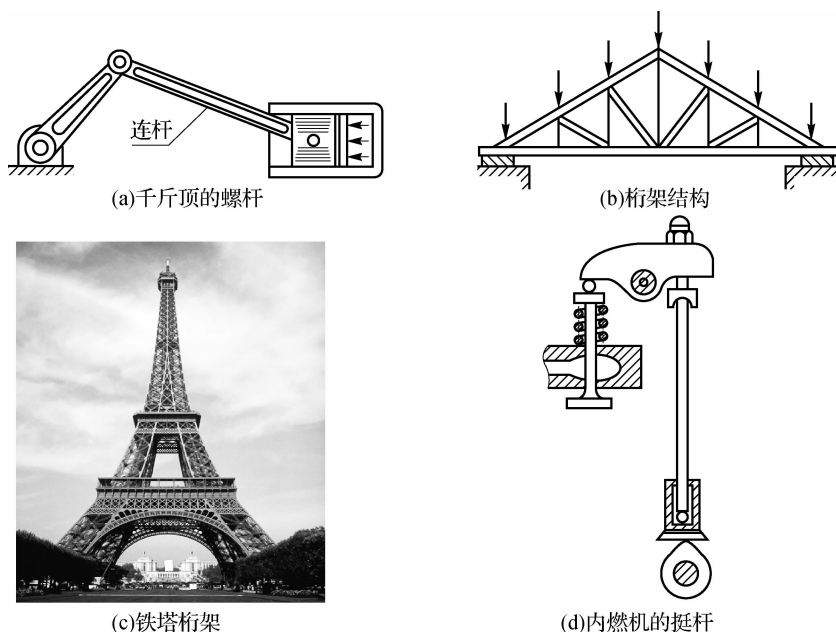


图 2-2 轴向拉伸与压缩变形实例

虽然这些承受拉压外力的杆件外形各有差异,加载方式也不尽相同,但它们有共同的受

力特点:作用于杆件上的外力合力作用线与杆轴线重合。在这种受力状态下,杆件主要变形是纵向伸长,相邻两截面移远,如图 2-3(a)所示;或者纵向缩短,相邻两截面移近,如图 2-3(b)所示,这种变形形式称为轴向拉伸与压缩变形。

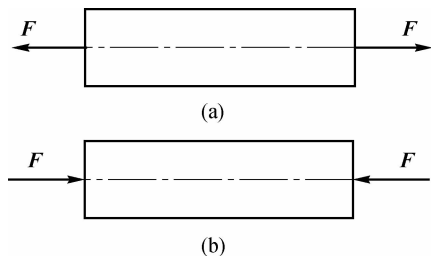


图 2-3 轴向拉伸与压缩变形的形式

二、轴向拉伸和压缩变形时的内力分析

1. 轴力

由于该段杆所有外力的作用线与杆轴线重合,内力合力 F_N 的作用线也必与杆轴线重合。这种作用线与轴线重合(垂直于横截面并通过其形心)的内力称为轴力。轴力 F_N 的符号习惯上规定:拉伸为正,压缩为负。即正轴力方向背离所作用截面,负轴力方向指向所作用截面。

通过所研究的杆段的平衡条件即可求得轴力 F_N 。由于整个杆件处于平衡状态,故其任一截开部分也应处于平衡状态,该段杆列平衡方程

$$\sum F_x = 0, F_N - F_1 = 0$$

故

$$F_N = F_1$$

2. 截面法

将杆在任一横截面 $m-m$ 处假想地截分为两部分,如图 2-4(a)所示,任取一段(比如左段)分析研究,弃去另一段,画出该段所受外力,而将另一段对该段的作用以横截面上的内力代替,如图 2-4(b)所示,这种表示和求解杆件横截面的内力方法称为截面法。

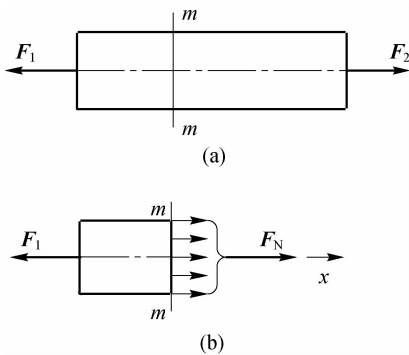


图 2-4 截面法

3. 轴力图

若杆件不是仅两端受有外力,则杆件各部分横截面上的轴力不尽相同。此时常用轴力图表示轴力随横截面沿轴线位置的变化情况。轴力图是按选定的比例,以平行于轴线的坐标表示横截面位置,垂直于轴线的坐标表示相应截面的轴力值,从而得到截面位置坐标与相应截面轴力间关系的图线。下面举例说明轴力图的绘制方法。

例 2-1 如图 2-5 所示,求杆件各段轴力并绘制轴力图。

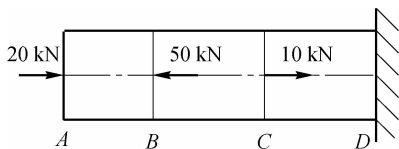


图 2-5 杆件受力图

分析:在 AB 之间任一截面处截开,所研究部分所受外力均相同,由平衡原理可知各截面内力也相同。BC 和 CD 也是如此。而显然在外力作用处 B 截面左侧截开部分与右侧截开部分所受外力是不同的,因而截面上的内力也就不同。当杆上有不止两个外力作用时,应以外力为界分段,分别求出各段轴力,如图 2-6(b)所示。

解:求 AB 段内任一横截面上的轴力时,应用截面法,假想在截面 1—1 处截开后,分离左段杆研究其平衡状况,如图 2-6(c)所示。

假定轴力 F_{N1} 为正向(拉力),由平衡方程可求得 AB 段内任一横截面上的轴力

$$\sum F_x = 0, F_{N1} + 20 = 0$$

故 $F_{N1} = -20 \text{ kN}$ 。结果为负值,说明该轴力实际指向与原先假定方向相反,即应为压力。

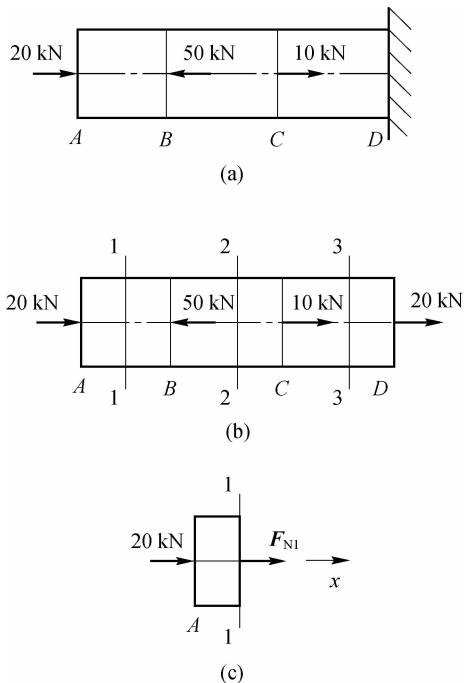


图 2-6 AB 段截面 1—1 受力分析

同理,可计算 BC 段内任一截面 2—2 上的轴力,如图 2-7 所示。

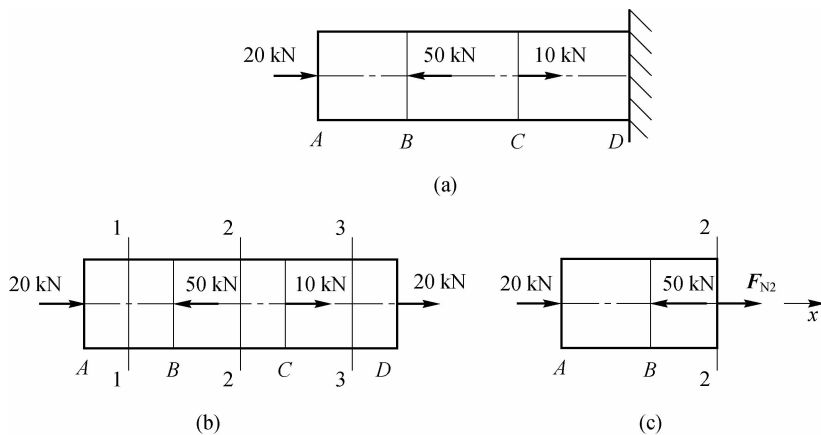


图 2-7 BC 段截面 2—2 受力分析

若取左段部分研究,可得

$$F_{N2} - 50 + 20 = 0$$

故 $F_{N2} = 50 - 20 = 30$ kN。结果为正值,说明该轴力实际指向与原先假定方向相同,即应为拉力。

计算 CD 段截面 3—3 上的轴力时,为计算方便,可取截面右段部分研究,如图 2-8 所示。

右段部分包含固定端约束,故在计算轴力之前应当先算出该端反力(由杆件的整体平衡求出)。于是由该部分的平衡条件可得 $F_{N3} = 20$ kN。

若取截面 3—3 左段部分研究,则有

$$F_{N3} - 50 + 20 + 10 = 0$$

同样可得 $F_{N3} = 20$ kN。结果为正值,说明该轴力实际指向与原先假定方向相同,即应为拉力。

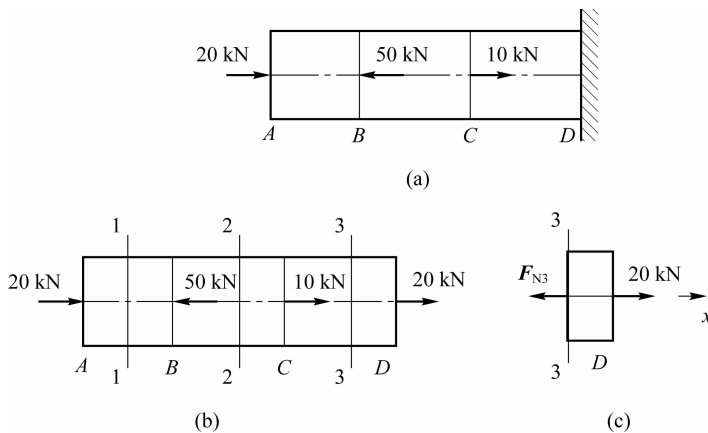


图 2-8 CD 段 3—3 截面受力分析

可见,不论分析左段还是右段,所得结果是相同的。计算时应选取受力比较简单的一段作为分析对象,以使运算简便。

绘制的轴力图如图 2-9(b)所示,图上应标明数值和正负号。从该图即可确定各段轴力和最大轴力数值及其所在截面的位置。

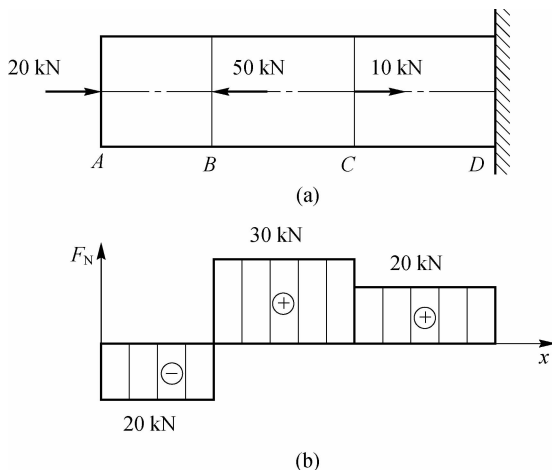


图 2-9 例 2-1 内力分析及轴力图

三、轴向拉伸和压缩变形时的应力分析

1. 横截面上的应力



微课
拉伸正应力公
式推导

由于轴力 F_N 垂直于横截面且通过横截面的形心,故横截面上应有正应力 σ ,因为只有与 σ 相应的内力微分 $\sigma \cdot dA$ 才能合成轴力 F_N 。 σ 在横截面上的分布规律还未知。

要了解 σ 在横截面上各点位置的变化规律,可先通过考察杆件受力后的表面变形规律,进而由表及里地推测杆件内部横截面上各点的变形情况,再根据力与变形的关系即可了解横截面上各点的应力分布规律。最后通过内力微分 $\sigma \cdot dA$ 与轴力 F_N 的静力合成关系,就可导出横截面正应力 σ 的计算公式。

取等直均质杆进行分析。杆件受力变形前在其侧表面画两条垂直于轴线的横向直线 ab 和 cd ,如图 2-10(a)所示。杆件拉伸变形后,可观察到两横向直线仍为直线,只是平行移动到 $a'b'$ 和 $c'd'$ 。根据这一现象,可以假设:原为平面的横截面在杆件变形后仍保持为平面,且仍垂直于轴线。此即为平面假设。

由平面假设可推知,杆中所有纵向纤维的伸长相等。又由于假设材料是均匀的,各点的力学性能相同,故各点的正应力 σ 与线应变 ϵ 的关系均相同,所以横截面上各点正应力 σ 相同,即横截面上正应力 σ 均匀分布,如图 2-10(b)所示。

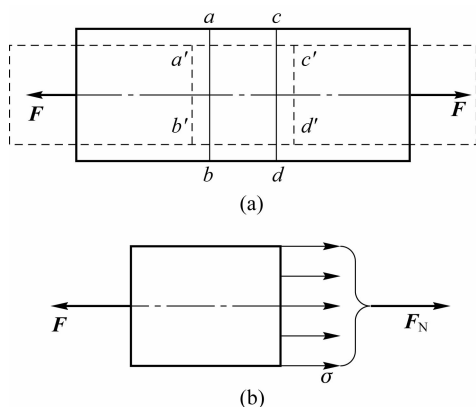


图 2-10 轴向拉压变形横截面应力分析

若以 A 表示横截面面积,其面积微分 dA 上的内力微分 $\sigma \cdot dA$ 组成一个垂直于横截面的平行力系。于是按静力合成的方法可得

$$F_N = \int_A \sigma dA \quad (2-1)$$

因为正应力 σ 均匀分布,故

$$F_N = \int_A \sigma dA = \sigma \cdot A$$

于是得

$$\sigma = \frac{F_N}{A} \quad (2-2)$$

此即为横截面上正应力 σ 的计算公式。式中, F_N 为轴力; A 为横截面面积。正应力 σ 的符号规定:拉应力为正,压应力为负。

此外还要说明的是,应力均布是对杆内大部分区域而言,而在加载点附近局部区域,应力、变形是否均匀则与加力方式有关。当杆表面受均布外力作用时,荷载作用处应力和变形是均匀的;若杆表面所受外力是集中载荷或其他非均布载荷,载荷作用处应力、变形并非均匀的。实验表明,载荷分布方式不同,只影响载荷作用处附近局部区域的应力和变形,而离此稍远区域则影响甚微,此即为圣维南原理。

因此,在材料力学及一般常规工程计算中通常都按上述公式计算拉压杆横截面应力。

例 2-2 如图 2-11 所示压紧机构,若已知液压缸推力 $F=60 \text{ kN}$,两连杆横截面积相同, $A=1\,000 \text{ mm}^2$, $\alpha=30^\circ$ 。试求连杆 AB 和连杆 AC 的应力。

解:(1)受力分析。分析节点 A 的受力,如图 2-12 所示,该节点受汇交力系。由汇交力系的平衡条件可得

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0, F_1 \cos 30^\circ - F_2 \cos 30^\circ &= 0 \\ \sum F_y = 0, F - 2 F_1 \sin 30^\circ &= 0 \end{aligned}$$

故 $F_1 = F_2 = \frac{F}{2 \sin 30^\circ} = 60 \text{ kN}$ 。

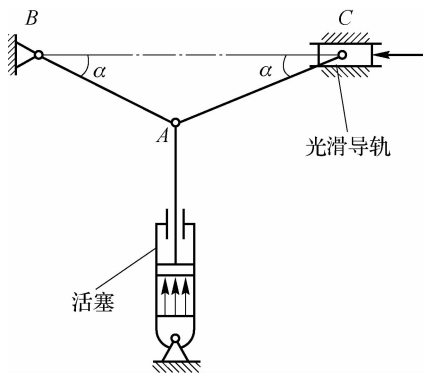


图 2-11 压紧机构

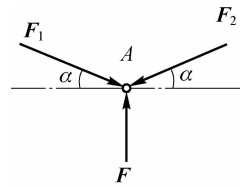


图 2-12 节点 A 受力分析

(2) 应力计算。由式(2-2)计算两个连杆横截面的应力

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{F_1}{A} = \frac{60 \times 10^3 \text{ N}}{1\,000 \text{ mm}^2} = 60 \text{ MPa} \quad (-)$$

计算结果为负,两连杆横截面所受应力为压应力。

例 2-3 如图 2-13 所示结构中,钢拉杆 AB 中间段直径 $d_1 = 10 \text{ mm}$,两端(螺杆)部分内径 $d_2 = 8 \text{ mm}$, $F = 9 \text{ kN}$ 。其余被连接物体均视作刚体,试求拉杆各段应力。

解: (1) 受力分析。分析右半部分受力情况如图 2-14 所示,可得

$$\sum M_D = 0, F_R \times 2 - F_N \times 2 = 0$$

故

$$F_N = F_R \quad (a)$$

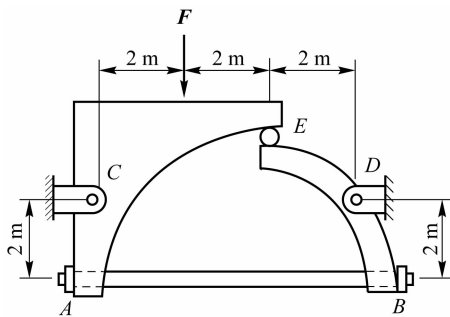


图 2-13 拉杆连接件

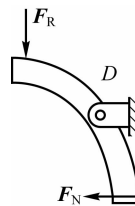


图 2-14 右半部分结构受力分析

分析左半部分受力情况如图 2-15 所示,可得

$$\sum M_C = 0, F_R \times 4 + F_N \times 2 - 9 \times 2 = 0$$

故

$$F_N = 9 - 2F_R \quad (b)$$

联立式(a)和式(b)解得 $F_N = 3 \text{ kN}$ 。

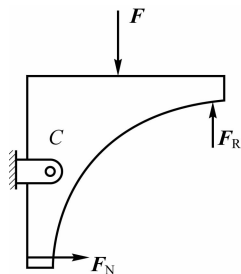


图 2-15 左半部分结构受力分析

(2) 应力计算。

中间部分

$$\sigma = \frac{F_N}{A_1} = \frac{3\,000\text{ N}}{(10\text{ mm})^2 \cdot \frac{\pi}{4}} = 38\text{ MPa}$$

两端部分

$$\sigma = \frac{F_N}{A_2} = \frac{3\,000\text{ N}}{(8\text{ mm})^2 \cdot \frac{\pi}{4}} = 60\text{ MPa}$$

2. 斜截面上的应力

为了解杆任意斜截面上的应力情况,可用一个假想的与横截面夹角为 α 的斜截面 $k-k$,如图 2-16(a)所示,将杆一分为二,并取左段杆研究,如图 2-16(b)所示。由该段杆的平衡可得此斜截面上的内力,即

$$F_\alpha = F = F_N \quad (2-3)$$

仿照前面推论横截面上正应力 σ 分布变化规律的方法过程,可知斜截面上各点处的应力也是均匀分布的,见图 2-16(b)。若以 A_α 表示斜截面面积,则有几何关系

$$A_\alpha = \frac{A}{\cos \alpha} \quad (2-4)$$

于是可得任意斜截面 $k-k$ 上的应力为

$$p_\alpha = \frac{F_\alpha}{A_\alpha} = \frac{F}{A} \cos \alpha = \sigma \cos \alpha \quad (2-5)$$

如图 2-16 所示,将斜截面上应力 p_α 分解为垂直于斜截面的正应力分量 σ_α 和相切于斜截面的切应力分量 τ_α ,得

$$\sigma_\alpha = p_\alpha \cos \alpha = \sigma \cos^2 \alpha \quad (2-6)$$

$$\tau_\alpha = p_\alpha \sin \alpha = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha \quad (2-7)$$

式(2-6)和式(2-7)表示过拉压杆内任一点的不同截面上的正应力 σ_α 和切应力 τ_α 随 α 角而改变的规律。一般而言,斜截面上既有正应力 σ_α 也有切应力 τ_α 。

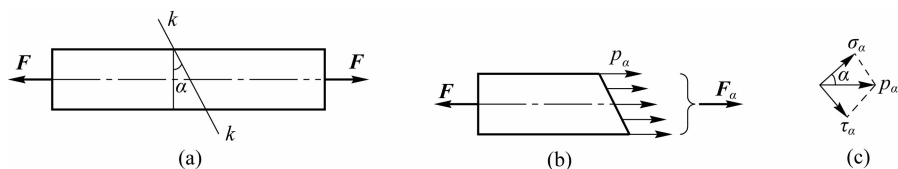


图 2-16 轴向拉压变形斜截面应力分析

例 2-4 分析拉压杆过所有各截面中一点正应力 σ_α 最大和切应力 τ_α 最大的截面。

解:由式(2-6)和式(2-7)可知,当 $\cos^2 \alpha$ 、 $\sin 2\alpha$ 达到最大值 1 时,正应力 σ_α 和切应力 τ_α 分别为最大值。相应地, α 分别为 0° 和 45° 。

可见,轴向拉压时:在杆横截面上,正应力 σ_α 为最大值, $\sigma_{\max} = \sigma_{0^\circ} = \sigma$;在与杆轴线成 45° 的斜截面上,切应力 τ_α 为最大值, $\tau_{\max} = \tau_{45^\circ} = \frac{\sigma}{2}$ 。

此外,平行于杆件轴线的纵向截面($\alpha=90^\circ$)上无任何应力。

四、轴向载荷下材料的力学性能

构件的强度和刚度与材料破坏时的应力以及力与变形间的关系等问题有关,而这些都属于材料的固有性能,需由实验来测定。材料的力学性能又称为机械性能,是指材料在外力作用下表现出的变形和破坏等方面的特性。

实验常用设备仪器主要分为两类:一类是使试件发生变形并实时测定试件抗力的设备,常用的有万能试验机,如图 2-17 所示,其工作原理是通过试验机夹头的上下移动使试件变形,通过力传感器,实时测量试件的受力状况。另一类是测量试件变形的仪器,如引伸仪、千分表和电阻应变仪等,这类变形仪可将变形放大,在一定精度范围内测量试件的变形。

为了便于比较不同材料的试验结果,国家标准对试样的形状、加工精度、加载速度、试验环境等都有统一规定。拉伸试验前,在试样表面刻画出长为 l 的一段作为工作段,如图 2-18(a)所示,工作段长度 l 称为标距。对圆截面试样,标距 l 与直径 d 常用两种标准比例,即 $l=10d$ 和 $l=5d$ 。压缩试件通常用短圆柱体,如图 2-18(b)所示,其长度与直径比一般规定为 $1\sim 3$ 。混凝土、石块等则制成立方体试件。



图 2-17 万能试验机

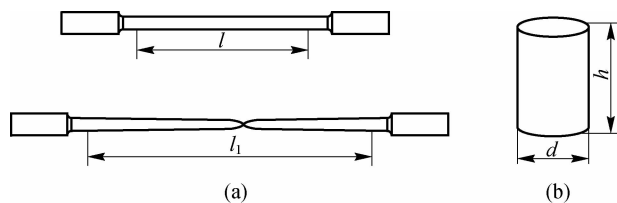


图 2-18 试样规格

试验应在室温下以缓慢平稳的加载方式进行,常温静载试验是测定材料力学性能的基本试验。通过材料的轴向拉压试验,可了解其受力、变形和破坏全过程中所表现出的力学性能。工程上常用的材料种类很多,下面主要以低碳钢为代表,介绍材料拉伸及压缩时的力学性能。

1. 低碳钢拉伸图及其力学性能

低碳钢是含碳量在 0.3% 以下的碳素钢, 是工程中使用最广泛的材料。低碳钢在拉伸试验中表现出的力学性能比较全面和典型。

试样装在试验机上后, 受到缓慢增加的拉力作用。对应着每一个拉力 F , 试样标距 l 有相应伸长量 Δl 。表示 F 和 Δl 关系的曲线, 称为拉伸图或 $F-\Delta l$ 曲线, 如图 2-19 所示。 $F-\Delta l$ 曲线与试样尺寸差异有关。为了消除试样尺寸的影响, 将表示拉力 F 和伸长量 Δl 的纵横坐标分别除以试样原始面积 A 和标距原始长度 l , 即得出正应力 σ 与应变 ϵ (由于标距内各点变形均匀, 平均应变 $\Delta l/l$ 即为线应变) 的关系曲线。这种以 σ 为纵坐标, ϵ 为横坐标的关系曲线称为工程应力应变图或 $\sigma-\epsilon$ 曲线, 如图 2-20 所示。显然, 应力应变图与拉伸图形状相似, 仅坐标的比例尺度不同。 $\sigma-\epsilon$ 曲线是研究物体力学性能的重要依据。

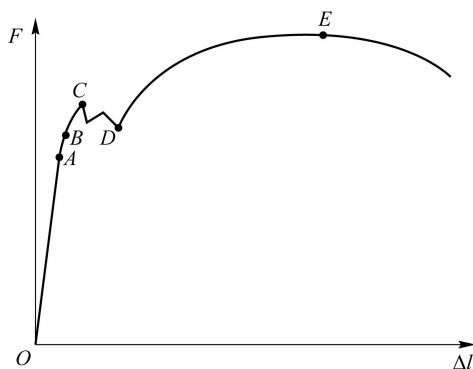


图 2-19 $F-\Delta l$ 曲线

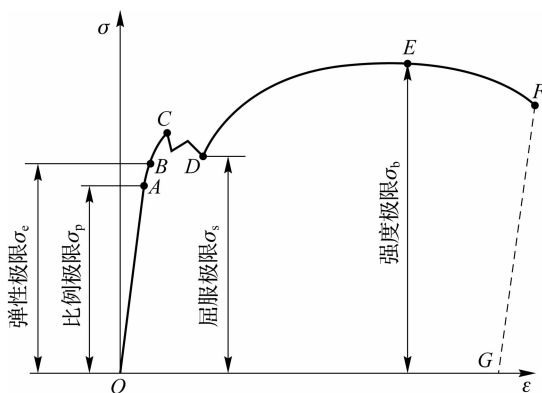


图 2-20 $\sigma-\epsilon$ 曲线

根据试验结果, 低碳钢的力学性能大致如下。

(1) 弹性阶段。在拉伸初始阶段, σ 与 ϵ 的关系表现为直线 OA , 表明在这一阶段内应力 σ 与应变 ϵ 成正比, 即

$$\sigma \propto \epsilon \quad (2-8)$$



微课
低碳钢拉伸力学性能

或写成

$$\sigma = E\varepsilon \quad (2-9)$$

这就是拉伸或压缩的胡克定律。式 2-9 中, E 为与材料有关的比例常数, 称为弹性模量。从图中可看出 E 即是材料在线性范围内应力应变图中直线 OA 的斜率。 E 的量纲与 σ 相同, 常用单位为 GPa ($1 \text{ GPa} = 10^9 \text{ Pa}$)。

应力与应变成正比关系的最大应力值(图 2-20 中 A 点所对应的应力)称为比例极限, 以 σ_p 表示。显然只有应力低于比例极限时, 应力才与应变成正比, 材料才服从胡克定律。在该区段材料是线弹性的。

超过比例极限后, 从 A 点到 B 点, σ 与 ε 之间的关系不再成比例, 但解除拉力后变形仍可完全消失, 这种变形称为弹性变形。材料只出现弹性变形的最大应力值(图 2-20 中 B 点所对应的应力)称为弹性极限, 以 σ_e 表示。在 $\sigma\varepsilon$ 曲线上, σ_e 和 σ_p 两点非常接近, 所以工程上对弹性极限和比例极限并不严格区分。

在应力大于弹性极限后再解除拉力, 则试样变形的一部分随之消失, 这部分变形即为弹性变形。但还残留一部分变形不能消失, 这种变形称为塑性变形或残余变形。

(2) 屈服阶段。当应力超过 B 点增加到某一数值时, 应变有非常明显的增加, 而应力略有下降后作小幅上下波动, 在 $\sigma\varepsilon$ 曲线上出现近于水平的小锯齿状线段。该区间应力基本保持不变, 而应变显著增加, 此现象称为屈服或流动。屈服阶段内材料波动的最大和最小应力分别称为上屈服极限和下屈服极限。上屈服极限的数值一般不稳定(与试样形状、加载速度等因素有关), 而下屈服极限数值则较稳定, 更能反映材料的性能。通常将下屈服极限称为屈服极限, 以 σ_s 表示。

表面磨光的试样屈服时, 表面将出现与轴线大致成 45° 倾角的细微条纹, 这是由于材料内部晶格相对滑移而形成的, 称为滑移线。由于拉伸时与杆轴成 45° 倾角斜截面上的切应力为最大值, 可见屈服现象与切应力有关。

(3) 强化阶段。屈服阶段过后, 材料又恢复了抵抗变形的能力, 要使试件继续伸长必须增加拉力。这种现象称为材料的强化。在图 2-20 中, 强化阶段中的最高点 E 所对应的应力是材料所能承受的最大应力值, 称为强度极限或抗拉强度, 以 σ_b 表示。 σ_b 是衡量材料强度的重要指标。在强化阶段可观察到试样横向尺寸有明显减小。

(4) 颈缩破坏阶段。 E 点过后, 试样伸长到一定程度时, 在某一局部区段内横截面积突然急剧缩小, 出现所谓缩颈现象, 如图 2-21(a) 所示。由于在缩颈部分横截面积迅速减小, 使试样继续伸长所需拉力也相应减小(载荷读数反而降低)。在应力应变图中, 用横截面原始面积算出的应力随之下降, 一直降落到图 2-20 中的 F 点, 试样随即拉断, 如图 2-21(b) 所示。

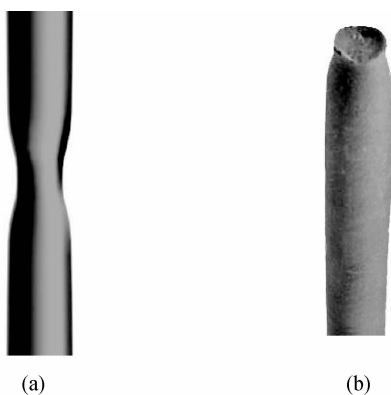


图 2-21 缩颈现象


 视频
 低碳钢拉伸
 试验

2. 强度指标和塑性指标

通过分析低碳钢的拉伸过程可得到衡量材料强度的两个重要指标—— σ_s 和 σ_b 。由于材料屈服时将出现显著的塑性变形,而零件的大量塑性变形将影响机器的正常工作,所以屈服极限 σ_s 是衡量材料强度的一个重要指标。而 σ_b 是材料所能承受的最大应力,显然是衡量材料强度的另一重要指标。

除强度指标外,还可得到衡量材料塑性的两个重要指标——伸长率和断面收缩率。

试样拉断后,标距长度改变量($l_1 - l$)与原始标距长度 l ,称为材料的伸长率 δ ,用百分数表示为

$$\delta = \frac{l_1 - l}{l} \times 100\% \quad (2-10)$$

该值代表了试样拉断后的塑性变形程度。试样的塑性变形越大, δ 也就越大。因此伸长率是衡量材料塑性的重要指标。承受动载荷、冲击的构件(如车轴、齿轮和冲杆等),材料除要有足够的强度外,还应有良好的塑性指标值,以耗散能量和延缓冲击。

试样拉断后,缩颈处(最小截面)横截面积改变量与原始横截面积 A 的比值,称为材料的断面收缩率 ψ ,用百分数表示为

$$\psi = \frac{A - A_1}{A} \times 100\% \quad (2-11)$$

该值代表了试样拉断后的横向塑性变形程度,也是衡量材料塑性的指标。

工程上通常按伸长率的大小把材料分成两大类, $\delta > 5\%$ 的材料称为塑性材料,如碳钢、黄铜和铝合金等; $\delta < 5\%$ 的材料称为脆性材料,如灰铸铁、玻璃和陶瓷等。

3. 卸载定律及冷作硬化

若在试样拉伸过程中中途卸载,将试样拉至超过屈服极限的 K 点后逐渐卸除拉力,应力应变关系图线将沿着斜直线 KH 回到 H 点,如图 2-22 所示。斜直线 KH 近似地平行于线弹性直线 OA 。这说明,在卸载过程中,应力和应变按直线规律变化,此即为卸载定律。拉力完全解除后,应力应变关系图中, HJ 相应的一部分变形为卸载后消失了的弹性变形 ϵ_e ,而 OH 相应的一部分变形表示卸载后残留下的塑性变形 ϵ_p 。

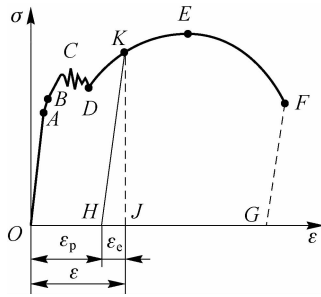


图 2-22 中途卸载应力应变关系图线

若将试样预先加载,使之达到强化阶段后卸载,在短期内再次加载,应力和应变关系基本是沿卸载时的斜直线 HK 变化。直到过卸载点 K 后,再沿无预加载曲线 KEF 变化。再次加载时,可认为材料在 K 点以前的变形是线弹性的,直到过 K 点后才开始出现塑性变形。比较图 2-22 中的 $OADEF$ 和 $HKEF$ 两条曲线,可见再次加载时,其比例极限(亦即弹性阶段)提高,而塑性变形和伸长率降低,这种现象称为冷作硬化。

工程上经常利用冷作硬化来提高材料的弹性阶段曲线。如起重钢索和建筑钢筋,常用冷拔工艺以提高强度。又如对某些零件进行喷丸处理,可使其表面发生塑性变形而形成冷硬层,从而提高零件表面层的强度。但另一方面,零件初加工后由于冷作硬化而变脆变硬,使材料可持续加工性能劣化。产生冷作硬化的零件,后续加工困难且容易产生裂纹,因而往往需要在几道工序之间安排退火处理,以消除硬化效应。

4. 其他材料拉伸时的力学性能

工程上常用的塑性材料,除低碳钢外,还有中碳钢、高碳钢、合金钢、铝、铝合金、青铜、黄铜、铜合金和球墨铸铁等。图 2-23 所示是几种材料的 $\sigma\epsilon$ 曲线。这些材料伸长率都较大,明显大于 5%,都属塑性材料。其中有的材料,如 16Mn 钢,和低碳钢一样有明显的弹性阶段、屈服阶段、强化阶段和局部变形阶段。很多其他材料,如青铜、硬铝和退火球墨铸铁等,没有明显的屈服阶段。还有些材料如 Mn 钢等,没有屈服阶段和缩颈破坏阶段,只有弹性阶段和强化阶段。

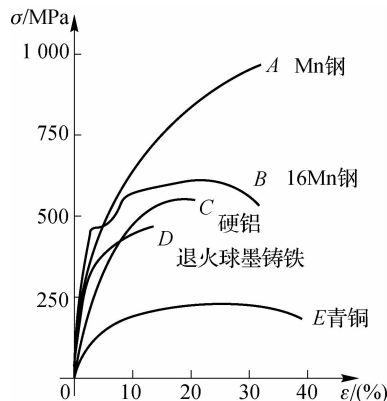


图 2-23 几种材料的 $\sigma\epsilon$ 曲线