第 1 章　函　　数

1.1　基 本 要 求

(1)认知函数的概念,知道反函数的定义.

(2)理解函数的性质,包括有界性、单调性、奇偶性和周期性.

(3)熟知基本初等函数,理解复合函数和初等函数.

(4)能用函数解决实际问题.

1.2　内 容 提 要

1.2.1　函数及其性质

1. 函数的概念

函数是描述变量间相互依赖关系的一种数学模型.

定义 1.1　设 x 和 y 是两个变量,D 是一个给定的非空数集.若对于每个 $x \in D$,变量 y 按照一定法则 f 总有确定的数值与它对应,则称 y 是 x 的函数,记为

$$y=f(x), x \in D$$

其中 x 称为自变量,y 称为因变量,数集 D 称为这个函数的定义域.

对于每个 $x \in D$,按照对应法则 f,总有确定的值 y 与之对应,则称这个值为函数在点 x 处的函数值,记为 $f(x)$.因变量与自变量的这种依赖关系通常称为函数关系.

当自变量 x 遍取 D 的所有数值时,对应的函数值 $f(x)$ 的全体构成的集合称为函数 f 的值域,记为 M,即

$$M=\{y \mid y=f(x), x \in D\}$$

函数的定义域与对应法则是确定函数的两个必不可少的要素.

函数的常用表示法有以下三种.

(1)**列表法**.将自变量的值与对应的函数值列成表格的方法,称为列表法.

(2)**图像法**.在坐标系中用图像来表示函数关系的方法,称为图像法.

(3)**公式法(解析法)**.将自变量和因变量之间的关系用数学表达式(解析表达式)来表示的方法,称为公式法(解析法).

2. 反函数

定义 1.2 设函数 $y=f(x)$,其定义域为 D,值域为 M,如果对于任意 $y\in M$,由函数关系式 $y=f(x)$恰好唯一确定出一个 $x\in D$ 与之对应,那么认为 x 是 y 的函数,记作 $x=g(y)$,我们称上述的 $y=f(x)$与 $x=g(y)$互为**反函数**,习惯上将 $x=g(y)$记作

$$x=f^{-1}(y)$$

习惯上常用 x 表示自变量,y 表示因变量,故常把 $y=f(x)$的反函数写作

$$y=f^{-1}(x)$$

由反函数的定义可知,在定义区间上单调的函数必有反函数.

定理 1.1 设函数 $f(x)$的定义域为 D,值域为 M.若 $f(x)$在 D 上是单调增加或单调减少的,则在 M 上 $f(x)$的反函数 $f^{-1}(x)$存在,且 $f^{-1}(x)$在 M 上也是单调增加或单调减少的.

对于分段函数求其反函数,只需分别求出与各自定义域相对应的函数表达式的反函数及其自变量的取值范围即可.

3. 函数的性质

设函数 $y=f(x)$在区间 I 上有定义[区间 I 为函数 $f(x)$的整个定义域或其定义域的一部分],则函数一般具有下列几种特性.

1)有界性

如果存在正数 M,使对任意的 $x\in I$,恒有 $|f(x)|\leqslant M$,则称函数 $y=f(x)$在区间 I 上有界,否则称 $y=f(x)$在区间 I 上无界.

2)单调性

若对任意的 $x_1,x_2\in I$,当 $x_1<x_2$ 时,恒有 $f(x_1)<f(x_2)$[或 $f(x_1)>f(x_2)$],则称函数 $y=f(x)$在区间 I 上单调增加(或单调减少).区间 I 称为单调增区间(或单调减区间);单调增加函数和单调减少函数统称为单调函数;单调增区间和单调减区间统称为单调区间.

3)奇偶性

设函数 $f(x)$的定义区间 I 关于原点对称,若对于任意的 $x\in I$,都有 $f(-x)=f(x)$,则称函数 $f(x)$是区间 I 上的偶函数;若对于任意的 $x\in I$,都有 $f(-x)=-f(x)$,则称函数 $f(x)$是区间 I 上的奇函数;若函数既不是奇函数也不是偶函数,则称为非奇非偶函数.

4)周期性

如果存在不为零的正实数 T,使得对于任意的 $x\in I$,$x+T\in I$,都有 $f(x+T)=f(x)$,则称函数 $y=f(x)$为周期函数,T 是 $y=f(x)$的一个周期.通常所说的周期函数的周期是指它的最小正周期.

1.2.2 初等函数

1. 基本初等函数

(1)常量函数.$y=C$(C 为常数),该函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$,图像为过点$(0,C)$且平行于 x 轴的直线.

(2)幂函数.$y=x^a$(a 为实数),该函数的定义域因 a 的取值不同而不同,但无论 a 为何值,它在区间$(0,+\infty)$内总有定义,且图像过点$(1,1)$.

(3)指数函数. $y=a^x$($a>0$,且 $a\neq1$,a 为常数),该函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$(0,+\infty)$. 当 $a>1$ 时,函数单调增加;当 $0<a<1$ 时,函数单调减少,图像过点$(0,1)$.

(4)对数函数. $y=\log_a x$($a>0$,且 $a\neq1$,a 为常数),该函数的定义域为$(0,+\infty)$,值域为$(-\infty,+\infty)$. 当 $a>1$ 时,函数单调增加;当 $0<a<1$ 时,函数单调减少,图像过点$(1,0)$. 在科学计数法中常用到以 e 为底的对数函数,称为自然对数,记作 $y=\ln x$.

(5)三角函数. $y=\sin x$,$y=\cos x$,$y=\tan x$,$y=\cot x$,$y=\sec x$,$y=\csc x$ 统称为三角函数.

(6)反三角函数. $y=\arcsin x$,$y=\arccos x$,$y=\arctan x$,$y=\text{arccot}\, x$ 统称为反三角函数.

2. 复合函数和初等函数

定义 1.3 设 $y=f(u)$,其中 $u=\varphi(x)$,且函数 $u=\varphi(x)$的值域包含在函数 $y=f(u)$的定义域内,则称 $y=f[\varphi(x)]$为由 $y=f(u)$与 $u=\varphi(x)$复合而成的复合函数,其中 u 叫作中间变量.

关于复合函数有如下几点说明.

(1)复合函数的定义可以推广到多个中间变量的情形.

(2)将一个较复杂的函数分解为若干个简单函数时,一定要分清层次,由外到内逐层分解.

(3)并不是任意两个函数都能构成复合函数.

1.3 习题解答

习题 1.1

1. 判断下列结论是否正确(请在括号中打"√"或"×").

(1)若两个函数的定义域与值域相同,则这两个函数是相同的函数. ( )

(2)分段函数是由两个或两个以上函数组成的. ( )

(3)偶函数的图像不一定过原点,奇函数的图像一定过原点. ( )

(4)当 $x\in(0,+\infty)$时,函数 $y=|f(x)|$与 $y=f(|x|)$的图像相同. ( )

【解】 (1)× (2)√ (3)× (4)×

2. 填空题.

(1)已知定义在 **R** 上的奇函数 $f(x)$满足 $f(x+3)=f(x)$,则 $f(6)=$________.

(2)函数 $f(x)=x^2-5x+4$ 在________单调递减,在________单调递增.

(3)$f(x)=\begin{cases}x^2+1, x\geqslant1\\1-x, x<1\end{cases}$,则 $f[f(-2)]=$________.

【解】 (1)答案:$f(6)=f(3)=f(0)=0$.

解析:$y=f(x)$为 **R** 上的奇函数,且 $f(x+3)=f(x)$,所以 $y=f(x)$的周期 $T=3$,则 $f(6)=f(3)=f(0)=0$.

提示:定义在 **R** 上的奇函数一定过原点.

(2)答案：$\left(-\infty,\frac{5}{2}\right),\left(\frac{5}{2},+\infty\right)$.

解析：$f(x)=x^2-5x+4$ 的对称轴为 $x=\frac{5}{2}$. 所以，其在 $\left(-\infty,\frac{5}{2}\right)$ 内单调递减，在 $\left(\frac{5}{2},+\infty\right)$ 内单调递增.

(3)答案：$f[f(-2)]=f(3)=10$.

解析：首先计算 $f(-2)$，因为 $-2<1$，所以应该代入 $f(1-x)$ 中，得到 $f(3)$；而 $3>1$，所以将 3 代入 $f(x)=x^2+1$ 中，得到结果 10.

3. 求下列函数的定义域.

(1)$y=\sqrt{2x-3}+\frac{1}{x-3}$；　　(2)$f(x)=\sqrt{1-2^x}+\frac{1}{\sqrt{x+3}}$.

【解】 (1)答案：定义域为 $\left\{x\mid x\geqslant\frac{3}{2}\text{且 }x\neq3\right\}$.

解析：求原函数的定义域需要满足两个条件：一是 $2x-3\geqslant0$，二是 $x-3\neq0$. 由此即得 $x\geqslant\frac{3}{2}$ 且 $x\neq3$.

(2)答案：定义域为 $\{x\mid -3<x\leqslant0\}$.

解析：求原函数的定义域需要满足两个条件：一是 $1-2^x\geqslant0$，二是 $x+3>0$. 由此即得 $-3<x\leqslant0$.

4. 做出下列函数的图像.

(1)$y=|x-2|\cdot(x+1)$；　　(2)$y=\begin{cases}x+1, x\geqslant3\\ x^2-5, x<3\end{cases}$.

【解】 (1)提示：可先将原函数进行转化，转化为如下分段函数的形式.

$$y=|x-2|\cdot(x+1)=\begin{cases}(x-2)(x+1), x\geqslant2\\(2-x)(x+1), x<2\end{cases}$$

再根据分段函数取样点，画出函数图像. 图像略.

(2)画图原理同(1). 图像略.

习题 1.2

1. 指出下列函数由哪些简单函数复合而成.

(1)$y=\sin(x^2+1)$；　　(2)$y=\ln[\sin(x+5)]$；

(3)$y=\mathrm{e}^{\cos 2x}$；　　(4)$y=\arctan(\ln x)$.

【解】 (1)$y=\sin(x^2+1)$可看作由 $y=\sin u$ 和 $u=x^2+1$ 复合而成.

(2)$y=\ln[\sin(x+5)]$可看作由 $y=\ln u, u=\sin v, v=x+5$ 复合而成.

(3)$y=\mathrm{e}^{\cos 2x}$可看作由 $y=\mathrm{e}^u$ 和 $u=\cos 2x$ 复合而成.

(4)$y=\arctan(\ln x)$可看作由 $y=\arctan u$ 和 $u=\ln x$ 复合而成.

2. 设 $f(x)=3^x$，$g(x)=\sqrt{x}$，求

(1) $f[g(x)]$；　　　　(2) $g[f(x)]$.

【解】 (1) $f[g(x)]=3^{g(x)}=3^{\sqrt{x}}$.

(2) $g[f(x)]=\sqrt{f(x)}=\sqrt{3^x}$.

复习题一

1. 选择题.

(1) 函数 $f(x)=\sqrt{2^x-1}+\dfrac{1}{x-2}$ 的定义域为(　　).

A. $[0,2)$　　　　B. $(2,+\infty)$

C. $(0,2)\cup(2,+\infty)$　　　　D. $[0,2)\cup(2,+\infty)$

(2) 函数 $y=(2m-1)x+b$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数，则(　　).

A. $m>\dfrac{1}{2}$　　　　B. $m<\dfrac{1}{2}$

C. $m>-\dfrac{1}{2}$　　　　D. $m<-\dfrac{1}{2}$

(3) 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且当 $x>0$ 时，$f(x)=\dfrac{1}{x}+x^2$，则 $f(-1)$ 等于(　　).

A. -2　　　　B. 0

C. 1　　　　D. 2

【解】 (1) D　　(2) B　　(3) C

2. 填空题.

(1) 函数 $y=\sqrt{3-2x-x^2}$ 的定义域是________.

(2) 已知 $f(\sqrt{x}+1)=x+2\sqrt{x}$，则 $f(x)=$________.

(3) 函数 $f(x)=4-2\cos\dfrac{1}{3}x$ 的最小值是______；$f(x)$ 取得最小值时，x 的值为________.

(4) 若 $f(x)=\begin{cases}1-x, & x\geqslant 0\\ 2^x, & x<0\end{cases}$，则 $f(3)=$________.

【解】 (1) 答案：定义域为$[-3,1]$.

解析：原题可转化为解一元二次不等式 $3-2x-x^2\geqslant 0$，解得 $-3\leqslant x\leqslant 1$，即定义域为$[-3,1]$.

(2) 答案：$f(x)=x^2-1$.

解析：令 $\sqrt{x}+1=t$，则 $\sqrt{x}=t-1\Rightarrow x=(t-1)^2$，故由 $f(\sqrt{x}+1)=x+2\sqrt{x}$ 得

$$f(t)=(t-1)^2+2(t-1)=t^2-1$$

即 $f(x)=x^2-1$.

(3)答案:$2, 6k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

解析:由 $f(x)=4-2\cos\frac{1}{3}x$ 的图像可知,当 $\cos\frac{1}{3}x=1$ 时,$f(x)$ 取得最小值 2,而此时 x 的取值为 $6\pi, 12\pi, 18\pi, \cdots$,即 $6k\pi$,其中 $k\in\mathbf{Z}$.

(4)答案:-2.

解析:因为 $3>0$,所以将 $x=3$ 代入式 $f(x)=1-x$ 中,得到 $f(3)=-2$.

3. 设 $f(x)=\begin{cases} 2^x, & -1<x<0 \\ 2, & 0\leqslant x<1 \\ x-1, & 1\leqslant x\leqslant 3 \end{cases}$,求 $f(2), f\left(\frac{1}{2}\right), f\left(-\frac{1}{2}\right)$.

【解】 答案:$f(2)=1, f\left(\frac{1}{2}\right)=2, f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

解析:由于 $2\in[1,3]$,所以 $f(2)=2-1=1$;由于 $\frac{1}{2}\in[0,1)$,所以 $f\left(\frac{1}{2}\right)=2$;由于 $-\frac{1}{2}\in(-1,0)$,所以 $f\left(-\frac{1}{2}\right)=2^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

4. 下列函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是否相同?

(1) $f(x)=\frac{x-1}{x^2-1}, g(x)=\frac{1}{x+1}$;

(2) $f(x)=\sqrt{(1-x)^2}, g(x)=1-x$;

(3) $f(x)=x, g(x)=\ln e^x$.

【解】 答案:(1)不同;(2)不同;(3)相同.

解析:要判定两个函数是相同的,需要满足两个条件:一是函数的定义域相同;二是函数定义域相同的情况下,相同的自变量得到的函数值相同.

首先看第(1)题,函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x|x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)\}$,而函数 $g(x)$ 的定义域为 $\{x|x\in(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)\}$,故函数 $f(x)$ 和函数 $g(x)$ 不同.

其次看第(2)题,函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x|x\in(-\infty,+\infty)\}$,函数 $g(x)$ 的定义域为 $\{x|x\in(-\infty,+\infty)\}$,两个函数的定义域相同. 接下来判定当 x 取同一值时所得到的函数值是否相同. 取 $x=2$ 代入函数 $f(x)$ 和函数 $g(x)$,得到 $f(x)=1, g(x)=-1$,可知对于同一自变量 x 值,得到的两个函数值不相同,故这两个函数不同.

最后看第(3)题,函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x|x\in(-\infty,+\infty)\}$,函数 $g(x)$ 的定义域为 $\{x|x\in(-\infty,+\infty)\}$,两个函数的定义域相同. 而对于任意取值 x,均有 $f(x)=g(x)$,故这两个函数相同.

5. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\frac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$; (2) $y=\ln(x^2-1)+\arcsin\frac{1}{x+1}$.

【解】 答案:(1) $[-2,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$;(2) $(-\infty,-2]\cup(1,+\infty)$.

解析:首先看第(1)题,要想使函数有意义,则 x 必须满足如下不等式组.

$$\begin{cases}1-x^2\neq 0\\ x+2\geqslant 0\end{cases}$$

解上述不等式组，可得 $x\in[-2,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

其次看第(2)题，要想使函数有意义，则 x 必须满足如下不等式组.

$$\begin{cases}x^2-1>0\\ -1\leqslant\dfrac{1}{x+1}\leqslant 1\end{cases}$$

解上述不等式组，可得 $x\in(-\infty,-2]\cup(1,+\infty)$.

6. 对于下列函数 $f(x)$ 与 $g(x)$，求复合函数 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$，并确定它们的定义域.

(1) $f(x)=\sqrt{x+1}$，$g(x)=x^4$；

(2) $f(x)=\sqrt{1-x}$，$g(x)=\sqrt{x-1}$.

【解】 答案：(1) $f[g(x)]=\sqrt{x^4+1}$，$x\in\mathbf{R}$，$g[f(x)]=(x+1)^2$，$x\geqslant -1$.

(2) $f[g(x)]=\sqrt{1-\sqrt{x-1}}$，$1\leqslant x\leqslant 2$，$g[f(x)]=\sqrt{\sqrt{1-x}-1}$，$x\leqslant 0$.

解析：首先看第(1)题，对于复合函数 $f[g(x)]$，是将 $g(x)$ 作为函数 $f(x)$ 的自变量的，因此将 $g(x)=x^4$ 代入函数 $f(x)$ 中，可得 $f[g(x)]=\sqrt{x^4+1}$；接下来判定该复合函数的定义域，因为无论 x 取何值，复合函数都有意义，所以该复合函数的定义域为全体实数，即 $\mathbf{R}$.

对于复合函数 $g[f(x)]$，是将函数 $f(x)$ 作为函数 $g(x)$ 的自变量的，因此，将 $f(x)=\sqrt{x+1}$ 代入函数 $g(x)$ 中，可得 $g[f(x)]=(x+1)^2$；接下来判定该复合函数的定义域，如果单看复合函数 $g[f(x)]=(x+1)^2$，x 可以取任意值，但是这里要注意，自变量在满足复合函数之前首先要满足 $f(x)$ 的定义域，即 $x+1\geqslant 0$，从而得出复合函数 $g[f(x)]=(x+1)^2$ 的定义域为 $x\geqslant -1$.

其次看第(2)题，解题过程参考第(1)题，即可得到结果.

7. 求下列函数的反函数.

(1) $y=1+\log_4 x$；　　　　(2) $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$.

【解】 答案：(1) $y=4^{x-1}$，$x\in\mathbf{R}$；(2) $y=\log_2\dfrac{x}{1-x}$，$0<x<1$.

解析：首先看第(1)题，由 $y=1+\log_4 x$ 得

$$4^{y-1}=x$$

所以，函数 $y=1+\log_4 x$ 的反函数为 $y=4^{x-1}$，其定义域为原函数的值域，即 $x\in\mathbf{R}$.

其次看第(2)题，由 $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$ 得

$$2^x(1-y)=y$$

从而有 $2^x=\dfrac{y}{1-y}$，得出 $x=\log_2\dfrac{y}{1-y}$，所以函数 $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$ 的反函数为 $y=\log_2\dfrac{x}{1-x}$，其定义域为原函数的值域，即 $0<x<1$.

8. 已知 $f(x-1)=x^2+x+1$,求 $f\left(\frac{1}{x-1}\right)$.

【解】 由 $f(x-1)=x^2+x+1=(x-1)^2+3(x-1)+3$ 得

$$f(x)=x^2+3x+3$$

因此可得 $f\left(\frac{1}{x-1}\right)=\left(\frac{1}{x-1}\right)^2+\frac{3}{x-1}+3$.

9. 设 $f(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$且对于任意 x,y 都有

$$f(x+y)+f(x-y)=f(x)f(y)$$

且 $x\neq0$ 时 $f(x)\neq0$. 证明 $f(x)$为偶函数.

【证明】 因为对于任意 $x,y\in\mathbf{R}$,都有

$$f(x+y)+f(x-y)=f(x)f(y)$$

令 $x=y=0$,得 $f(0)=2$ 或 $f(0)=0$.

当 $f(0)=0$ 时,对于任意的 $x\neq0$,都有 $f(x+0)+f(x-0)=f(x)\cdot f(0)=0$ 与 $f(x)\neq0$ 矛盾. 所以,$f(0)=0$ 舍去.

所以,$f(0)=2$,$f(0+y)+f(0-y)=f(0)\cdot f(y)$,从而得 $f(-y)=f(y)$,即函数 $f(x)$ 为偶函数.

10. 某单位有汽车一辆,一年中的税款、保险费及司机工资等支出共为 a,另外,行驶单位路程需油费 b,试写出一年中平均每千米费用 y 与行驶路程 x 的函数关系式.

【解】 由题干可知,一年中的税款、保险费及司机工资等费用为固定费用 a,而油费会随着路程的增加而增加,所以油费是个变量,于是可以得出如下一个函数关系式.

$$y=bx+a$$

但是要注意,上式求得的是一年汽车行驶的总费用,而我们的目的是写出一年中平均每千米费用与行驶路程的函数关系式,所以得出如下结果.

$$y=\frac{bx+a}{x}$$

即为所求函数关系式.

11. 一物体由静止开始做直线运动,前 10 s 内做匀加速运动,加速度为 2 $\mathrm{cm/s^2}$,10 s 后做匀速运动,运动开始时路程为零,试建立路程 s 与时间 t 之间的函数关系.

【解】 由题干知,该物体的运动可看作两部分:一部分是匀加速运动,另一部分是匀速运动,时间分割点是 10 s. 于是,当 $0\leqslant t\leqslant10$ 时,可由匀加速直线运动的位移公式($s=v_0t+\frac{1}{2}at^2$,因为物体的初始速度为 0,且从时间 0 s 开始运动,因此可将位移公式简化为 $s=\frac{1}{2}at^2$)得到下面的关系式.

$$s=\frac{1}{2}at^2=\frac{1}{2}\times2\times t^2=t^2 \tag{1-1}$$

10 s 后($t>10$)物体开始做匀速直线运动,由匀速直线运动的位移公式得到如下的关系式.

$$s=s_0+v_0t \tag{1-2}$$

对于式(1-2)中的 s_0,实际上是物体在前 10 s 内做匀加速直线运动所产生的位移,即由

式(1-1)可得 $s_0=10^2=100$,即在到达时刻 10 s 时,物体已经走了 100 cm. 而对于 10 s 时刻的初始速度,应该按照匀加速直线运动的速度公式计算得出.

$$v=v_0+at=0+2\times10=20$$

即物体在 10 s 时开始做匀速直线运动的速度为 20 cm/s,所以最终可以得出路程 s 与时间 t 之间的函数关系式为

$$s=\begin{cases} t^2, & 0\leqslant t\leqslant 10 \\ 100+20t, & t>10 \end{cases}$$

第 2 章　极限与连续

2.1　基 本 要 求

(1)理解数列极限的定义,知道收敛数列的性质.

(2)了解函数极限的定义,并能利用极限的四则运算法则对极限进行求解.

(3)理解无穷小与无穷大,并会对无穷小和无穷大进行求解.

(4)会使用两个重要极限进行极限的变换求解.

(5)理解函数连续性的概念,尤其是左连续和右连续的概念.

(6)知道什么是函数的间断点,并能够利用函数的间断点判断函数的连续性.

(7)掌握闭区间上连续函数的性质.

2.2　内 容 提 要

2.2.1　数列的极限

1. 数列极限的定义

定义 2.1　对于数列$\{x_n\}$,如果当 n 无限增大时,通项 x_n 无限接近于某个确定的常数 A,则称 A 为数列$\{x_n\}$的极限,或称数列$\{x_n\}$收敛于 A,记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A \text{ 或 } x_n \to A(n\to\infty)$$

若数列$\{x_n\}$没有极限,则称该数列发散.

2. 收敛数列的性质

定理 2.1(极限的唯一性)　收敛数列$\{x_n\}$的极限是唯一的.

定理 2.2(收敛数列的有界性)　如果数列$\{x_n\}$收敛,那么数列$\{x_n\}$一定有界.

推论 2.1　有界数列未必收敛,无界数列必定发散.

2.2.2　函数的极限

1. 函数极限的定义

1)当 $x\to\infty$时,函数 $f(x)$的极限

定义 2.2　一般地,如果当自变量 x 的绝对值无限增大($x\to\infty$)时,函数 $f(x)$无限趋近

于一个确定的常数 A，那么 A 就叫作函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限，记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to\infty)$$

定义 2.3　类似地，如果当 $x\to+\infty$（或 $x\to-\infty$）时，函数 $f(x)$ 无限趋近于一个确定的常数 A，那么 A 就叫作函数 $f(x)$ 当 $x\to+\infty$（或 $x\to-\infty$）时的极限，记作

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to+\infty)$$

$$\left[\lim_{x\to-\infty}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to-\infty)\right]$$

不难证明，$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 存在的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 都存在且相等，即

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}f(x)=A$$

2）当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

定义 2.4　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的附近有定义，如果当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 无限趋近于一个确定的常数 A，那么 A 就叫作函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限，记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to x_0)$$

左极限：当自变量 x 小于 x_0 而无限趋近于 x_0 时，如果函数 $f(x)$ 无限趋近于一个确定的常数 A，那么 A 就叫作函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的左极限，记作

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A \text{ 或 } f(x_0-0)=A$$

右极限：当自变量 x 大于 x_0 而无限趋近于 x_0 时，如果函数 $f(x)$ 无限趋近于一个确定的常数 A，那么 A 就叫作函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的右极限，记作

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A \text{ 或 } f(x_0+0)=A$$

不难证明，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 都存在且相等，即

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0^-}f(x)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A$$

2. 极限的四则运算法则

定理 2.3（极限四则运算法则）　设在自变量 x 的同一变化过程中，极限 $\lim f(x)$ 和 $\lim g(x)$ 都存在，则有

（1）$\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)$；

（2）$\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)$；

（3）$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}[\lim g(x)\neq 0]$.

法则（1）和法则（2）均可推广到有限个函数的情形，并有如下推论.

推论 2.2　$\lim[Cf(x)]=C\lim f(x)$（C 为常数）.

推论 2.3　$\lim[f(x)]^n=[\lim f(x)]^n$（$n$ 为正整数）.

3. 无穷小与无穷大

1）无穷小

定义 2.5　若在 x 的某一变化趋势下，函数 $f(x)$ 的极限为零，则称函数 $f(x)$ 为在 x 的这种变化趋势下的无穷小，简称无穷小.

无穷小具有如下几个性质.

性质 2.1 有限个无穷小的代数和仍为无穷小.

性质 2.2 有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

推论 2.4 常数与无穷小的乘积也是无穷小.

推论 2.5 有限个无穷小的乘积仍是无穷小.

设 α,β 是同一变化过程中的无穷小,则:

(1)如果 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha}=0$,就说 β 是比 α 高阶的无穷小,记作 $\beta=o(\alpha)$.

(2)如果 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha}=C\neq 0$,就说 β 是和 α 同阶的无穷小.

(3)如果 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha}=1$,就说 β 与 α 是等价无穷小,记作 $\alpha\sim\beta$.

定理 2.4 设 $\alpha\sim\alpha',\beta\sim\beta'$,且 $\lim \dfrac{\beta'}{\alpha'}$存在,则 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha}=\lim \dfrac{\beta'}{\alpha'}$.

2)无穷大

定义 2.6 在 x 的某一变化趋势下,若函数 $f(x)$的绝对值$|f(x)|$无限增大,则称函数 $f(x)$为在 x 的这种变化趋势下的无穷大,简称无穷大. $f(x)$为 $x\to x_0$ 的无穷大,记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$.

定理 2.5 在自变量的同一变化过程中有以下两种情况.

(1)如果函数 $f(x)$是无穷小,且 $f(x)\neq 0$,则$\dfrac{1}{f(x)}$是无穷大.

(2)如果函数 $f(x)$是无穷大,则$\dfrac{1}{f(x)}$是无穷小.

2.2.3 两个重要极限

1. 第一个重要极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 的基本特征是:分子、分母的极限值均为零,即$\dfrac{0}{0}$型,且分母中的变量与分子正弦函数的变量相同. 根据$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 的基本特征可写出如下推广形式.

若 $\varphi(x)\neq 0$,而$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=0$,则$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sin[\varphi(x)]}{\varphi(x)}=\lim\limits_{\varphi(x)\to 0}\dfrac{\sin[\varphi(x)]}{\varphi(x)}=1$. 其中,$x_0$ 可以为 0、常数或无穷大.

2. 第二个重要极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ 的基本特征是:底数的极限值为 1,指数的极限值是无穷大,即 1^∞ 型,且指数与底数中第二项[记为 $\varphi(x)$]互为倒数,底数为 $1+\varphi(x)$.

根据$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ 的基本特征可写出如下推广形式.

若 $\varphi(x)\neq 0$,而$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=0$,则$\lim\limits_{x\to x_0}[1+\varphi(x)]^{\frac{1}{\varphi(x)}}=\lim\limits_{\varphi(x)\to 0}[1+\varphi(x)]^{\frac{1}{\varphi(x)}}=\mathrm{e}$. 其中,$x_0$ 可以为 0、常数或无穷大.

2.2.4　函数的连续性

1. 函数连续性的概念

定义 2.7　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的附近有定义，如果 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$，那么就称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续.

定义 2.8　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的附近有定义，如果函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限存在，且等于它在点 x_0 处的函数值 $f(x_0)$，即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，那么就称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续.

由定义 2.8 可知，函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续必须满足以下三个条件.

(1)函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有定义，即 $f(x_0)$ 有意义.

(2)极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在.

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

左连续： 如果 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0-0)$ 存在且等于 $f(x_0)$，即 $f(x_0-0)=f(x_0)$，就说函数 $f(x)$ 在点 x_0 处左连续.

右连续： 如果 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0+0)$ 存在且等于 $f(x_0)$，即 $f(x_0+0)=f(x_0)$，就说函数 $f(x)$ 在点 x_0 处右连续.

显然，函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续的充分必要条件是函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处左连续且右连续.

2. 函数的间断点

如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 处不连续，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处间断，称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的间断点.

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的附近有定义，如果函数 $f(x)$ 有下列三种情形之一，则函数 $f(x)$ 在点 x_0 处不连续，且称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的不连续点或间断点.

(1)在点 $x=x_0$ 处没有定义.

(2)虽在点 $x=x_0$ 处有定义，但 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在.

(3)虽在点 $x=x_0$ 处有定义，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$.

如果点 x_0 是函数 $f(x)$ 的间断点，但左极限 $f(x_0-0)$ 和右极限 $f(x_0+0)$ 都存在，那么称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的第一类间断点. 不是第一类间断点的任何间断点，称为第二类间断点.

3. 闭区间上连续函数的性质

1)最值性质

对于在区间 I 上有定义的函数 $f(x)$，如果有 $x_0\in I$，使得对于任一 $x\in I$，都有

$$f(x)\leqslant f(x_0)\,[f(x)\geqslant f(x_0)]$$

则称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 在区间 I 上的最大值(最小值).

定理 2.6(最大值和最小值定理)　在闭区间上连续的函数在该区间上必有最大值和最

小值.

定理 2.7(有界性定理) 在闭区间上连续的函数在该区间上一定有界.

2)介值性质

如果点 x_0 使 $f(x_0)=0$,则称点 x_0 为函数 $f(x)$的零点.

定理 2.8(零点定理) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号 [即 $f(a)\cdot f(b)<0$],那么在开区间 (a,b) 内至少有一点 $\xi(a<\xi<b)$,使得 $f(\xi)=0$.

定理 2.9(介值定理) 设函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,且在该区间的端点处取不同的函数值 $f(a)=A$ 及 $f(b)=B$,那么,对于 A 与 B 之间的任意一个数 C,在开区间(a,b)内至少有一点 ξ,使得 $f(\xi)=C(a<\xi<b)$.

推论 2.6 在闭区间上连续的函数必取得介于最大值 M 与最小值 m 之间的任何值.

2.3 习题解答

习题 2.1

1. 当数列项数无限增加时,观察下列各数列的变化趋势.

(1)$1,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{4}},\frac{1}{\sqrt{5}},\cdots$;

(2)$-\frac{1}{2},\frac{1}{4},-\frac{1}{8},\frac{1}{16},-\frac{1}{32},\cdots$;

(3)$\cos\frac{\pi}{2},\cos\pi,\cos\frac{3}{2}\pi,\cos 2\pi,\cos\frac{5}{2}\pi,\cdots$;

(4)$7+\frac{5}{10},7+\frac{5}{10^2},7+\frac{5}{10^3},7+\frac{5}{10^4},7+\frac{5}{10^5},\cdots$;

(5)$\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{3},\sqrt[3]{4},\sqrt[3]{5},\sqrt[3]{6},\cdots$.

【解】 通过观察,可以发现当以上数列项数无限增加时,各数列具有如下趋势.

(1)当数列项数无限增加时,分母越来越大,而分子始终是 1,所以数列趋于 0.

(2)当数列项数无限增加时,分母越来越大,而分子始终是 1.对于奇数项来说,由于有负号限制,所以越来越趋于 0;对于偶数项来说,虽然没有负号限制,但是也越来越趋于 0.所以整个数列趋于 0.

(3)由余弦函数的性质可知,当数列项数无限增加时,数列项的值只是在三个数之间跳跃,即$-1,0,1$,故数列整体是在$-1,0,1$ 三个数之间跳跃的.

(4)当数列项数无限增加时,数列项中的分母项无限增大,分子始终保持为 5 不变,所以分数项逐渐趋于 0,故数列整体趋于 7.

(5)当数列项数无限增加时,数列项无限增大,故数列趋于正无穷.

2. 作出下面各数列在数轴上的点,并说出哪些数列有极限,哪些数列没有极限.

(1)$x_n=\frac{1}{3^n}$; (2)$x_n=\frac{n}{n+2}$; (3)$x_n=(-1)^n n$;

(4) $x_n=-\frac{1}{n}$；　(5) $x_n=n-(-1)^n$；　(6) $x_n=\frac{1}{n}\sin\frac{\pi}{n}$.

【解】 答案：(1)有极限，0；(2)有极限，1；(3)没有极限；(4)有极限，0；(5)没有极限；(6)有极限，0.

解析：(1)取数列的前 10 项列表(见表 2-1).

表 2-1

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{81}$	$\frac{1}{243}$	$\frac{1}{729}$	$\frac{1}{2\ 187}$	$\frac{1}{6\ 561}$	$\frac{1}{19\ 683}$	$\frac{1}{59\ 049}$

由表 2-1 可以看出，当 $n\to+\infty$ 时，$\frac{1}{3^n}\to 0$，故数列 $x_n=\frac{1}{3^n}$ 的极限为 0.

(2)取数列的前 10 项列表(见表 2-2).

表 2-2

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{9}{11}$	$\frac{5}{6}$

由表 2-2 可以看出，当 $n\to+\infty$ 时，$\frac{n}{n+2}$ 逐渐增大并趋于 1，故数列 $x_n=\frac{n}{n+2}$ 的极限为 1.

(3)取数列的前 10 项列表(见表 2-3).

表 2-3

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
-1	2	-3	4	-5	6	-7	8	-9	10

由表 2-3 可以看出，当 $n\to+\infty$ 时，$n(-1)^n$ 的值逐渐向数轴 x 轴的两端移动，直至无穷，故数列 $x_n=n(-1)^n$ 的极限不存在.

(4)取数列的前 10 项列表(见表 2-4).

表 2-4

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{7}$	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{9}$	$-\frac{1}{10}$

由表 2-4 可以看出，当 $n\to+\infty$ 时，$-\frac{1}{n}\to 0$，故数列 $x_n=-\frac{1}{n}$ 的极限为 0.

(5)取数列的前 10 项列表(见表 2-5).

表 2-5

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
2	1	4	3	6	5	8	7	10	9

由表 2-5 可以看出，当 $n\to+\infty$ 时，$n-(-1)^n$ 逐渐增大趋于无穷，故数列 $x_n=n-(-1)^n$ 的极限不存在.

(6)取数列的前 10 项列表(见表 2-6).

表 2-6

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
0	0.5	0.29	0.18	0.12	0.08	0.06	0.05	0.04	0.03

由表 2-6 可以看出，当 $n\to+\infty$ 时，$\frac{1}{n}\sin\frac{\pi}{n}\to 0$，故数列 $x_n=\frac{1}{n}\sin\frac{\pi}{n}$ 的极限为 0.

3. 根据数列极限的定义，判断下列无穷数列的极限.

(1)-1 是不是数列 $x_n=-1$ 的极限?

(2)2 是不是数列 $x_n=\frac{8n+11}{4n+5}$ 的极限?

(3)-3 是不是数列 $x_n=\frac{2-3n}{n+1}$ 的极限?

(4)5 是不是数列 $x_n=\frac{5\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}}$ 的极限?

【解】 答案:(1)是;(2)是;(3)是;(4)是.

解析:(1)对于任意的 $n\in\mathbf{Z}$，x_n 的值始终为-1，故-1 是数列 $x_n=-1$ 的极限.

(2)由极限定义可知，当 $n\to+\infty$ 时，$\frac{8n+11}{4n+5}\to 2$，故 2 是数列 $x_n=\frac{8n+11}{4n+5}$ 的极限.

(3)由极限定义可知，当 $n\to+\infty$ 时，$\frac{2-3n}{n+1}\to -3$，故-3 是数列 $x_n=\frac{2-3n}{n+1}$ 的极限.

(4)由极限定义可知，当 $n\to+\infty$ 时，$\frac{5\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}}\to 5$，故 5 是数列 $x_n=\frac{5\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}}$ 的极限.

习题 2.2

1. 作出下列函数的图像，并判断其极限.

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^x$;　　(2) $\lim\limits_{x\to-\infty}3^x$;

(3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x$;　　(4) $\lim\limits_{x\to\pi}\cos x$.

【解】 答案:(1)0;(2)0;(3)1;(4)-1.

解析:(1)令 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$，则当 $x\to+\infty$ 时可得到如图 2-1 所示的图像.

由图 2-1 可以看出，当 $x\to+\infty$ 时，函数 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 趋于 0，故 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^x=0$.

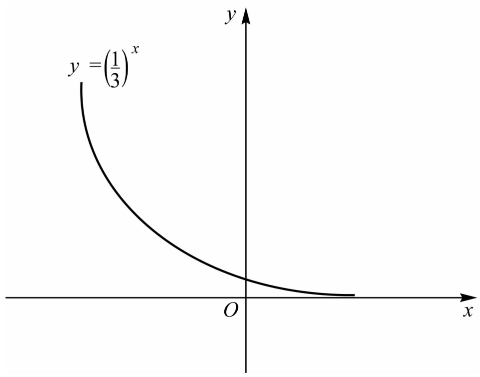

图 2-1

(2)令 $y=3^x$,则当 $x\to-\infty$时可得到如图 2-2 所示的图像.

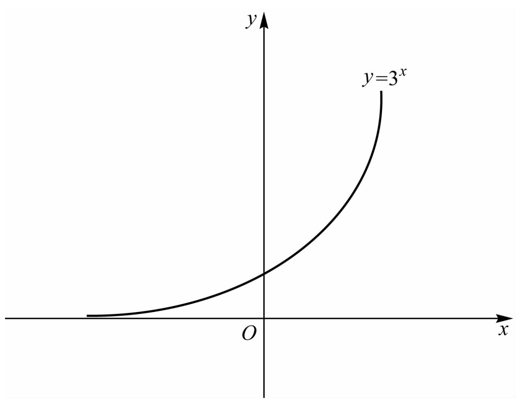

图 2-2

由图 2-2 可以看出,当 $x\to-\infty$时,函数 $y=3^x$ 趋于 0,故 $\lim\limits_{x\to-\infty}3^x=0$.

(3)令 $y=\sin x$,则当 $x\to\frac{\pi}{2}$时可得到如图 2-3 所示的图像.

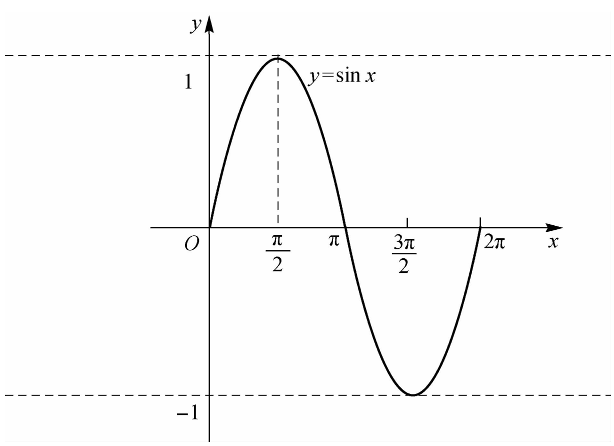

图 2-3

由图 2-3 可以看出，当 $x\to\frac{\pi}{2}$ 时，函数值 $y\to1$，故 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x=1$.

(4)令 $y=\cos x$，则当 $x\to\pi$ 时可得到如图 2-4 所示的图像.

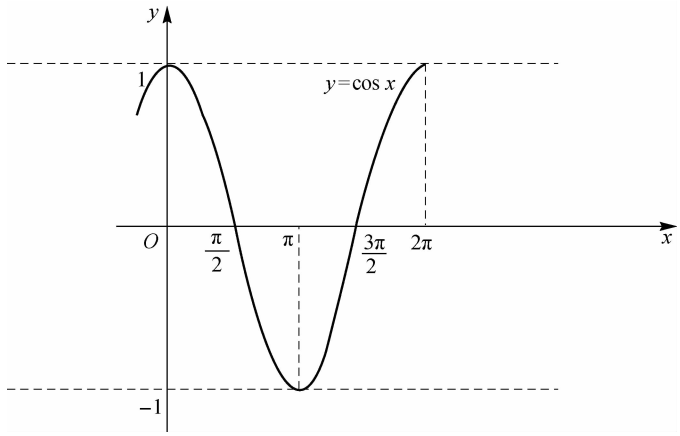

图 2-4

由图 2-4 可以看出，当 $x\to\pi$ 时，函数值 $y\to-1$，故 $\lim\limits_{x\to\pi}\cos x=-1$.

2. 下列函数在自变量怎样变化时是无穷小或无穷大？

(1) $y=\frac{1}{x^2}$；　　(2) $y=\frac{1}{x}$；

(3) $y=\tan x$；　　(4) $y=\ln x$.

【解】 (1)当 $x\to\infty$ 时，函数是无穷小；当 $x\to0$ 时，函数是无穷大.

(2)当 $x\to\infty$ 时，函数是无穷小；当 $x\to0$ 时，函数是无穷大.

(3)当 $x\to k\pi+\frac{\pi}{2}$ 时，函数是无穷大.

(4)当 $x\to0$ 时，函数是负无穷大；当 $x\to\infty$ 时，函数是正无穷大.

3. 计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to2}(-2)$；　　(2) $\lim\limits_{x\to1}(x^3-x^2+x-1)$；

(3) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-16}{x-4}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-9}{x-3}$；

(5) $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$；　　(6) $\lim\limits_{x\to0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}$；

(7) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$；　　(8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1})$；

(9) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{9x^4+3x^2-10}{3x^4+x^3-x^2+1}$；　　(10) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-2x^2+5}{100x^2+15}$.

【解】 (1) $\lim\limits_{x\to2}(-2)=-2$.

(2)根据极限的运算法则，有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}(x^3-x^2+x-1)&=\lim_{x\to1}x^3-\lim_{x\to1}x^2+\lim_{x\to1}x-1\\&=1^3-1^2+1-1=0\end{aligned}$$

(3)当 $x\to 2$ 时,分母的极限不为 0,故由极限的运算法则有

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-16}{x-4}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}x^2-\lim\limits_{x\to 2}16}{\lim\limits_{x\to 2}x-\lim\limits_{x\to 2}4}=\frac{(\lim\limits_{x\to 2}x)^2-16}{2-4}=6$$

(4)由于分母的极限为 0,故不能直接用商的运算法则,但是当 $x\neq 3$ 时,有

$$\frac{x^2-9}{x-3}=x+3$$

故有

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x+3)=6$$

(5)因为当 $x\to 1$ 时,$\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{1-x}$ 和 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3}{1-x^3}$ 的极限都不存在,故不能直接使用极限的运算法则. 当 $x\neq 1$ 时,有

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}&=\frac{1+x+x^2-3}{1-x^3}\\&=-\frac{x^2+x-2}{(x-1)(x^2+x+1)}\\&=\frac{-x-2}{x^2+x+1}\end{aligned}$$

故有

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{-x-2}{x^2+x+1}=-1$$

(6)将式 $\frac{(x+h)^3-x^3}{h}$ 进行变形转换,得到如下式子.

$$\begin{aligned}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}&=\frac{h(3x^2+3hx+h^2)}{h}\\&=3x^2+3hx+h^2\end{aligned}$$

故有

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}=\lim_{x\to 0}(3x^2+3hx+h^2)=h^2$$

(7)将式 $\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$ 进行变形转换,得到如下式子.

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}&=\frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}\\&=\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}\end{aligned}$$

故有

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}=\frac{1}{4}$$

(8)将式 $\sqrt{x}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1})$ 进行变形转换,得到如下式子.

$$\sqrt{x}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1})=\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1})(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1})}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}$$

$$=\frac{\sqrt{x}(x+2-x-1)}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}$$

$$=\frac{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}{\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$$

故有

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1})=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=\frac{1}{2}$$

(9)将式$\frac{9x^4+3x^2-10}{3x^4+x^3-x^2+1}$进行变形转换,得到如下式子.

$$\frac{9x^4+3x^2-10}{3x^4+x^3-x^2+1}=\frac{9+\frac{3}{x^2}-\frac{10}{x^4}}{3+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}}$$

故有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{9x^4+3x^2-10}{3x^4+x^3-x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{9+\frac{3}{x^2}-\frac{10}{x^4}}{3+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}}=\frac{9}{3}=3$$

(10)将式$\frac{x^3-2x^2+5}{100x^2+15}$进行变形转换,得到如下式子.

$$\frac{x^3-2x^2+5}{100x^2+15}=\frac{1-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^3}}{\frac{100}{x}+\frac{15}{x^3}}$$

故有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-2x^2+5}{100x^2+15}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^3}}{\frac{100}{x}+\frac{15}{x^3}}=\infty$$

4. 设函数 $f(x)=\begin{cases}e^x-1, x\leqslant 0\\ 2x+b, x>0\end{cases}$,要使极限$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$存在,则 b 应取何值?

【解】 由极限的定义可知,若函数 $f(x)$的极限存在,则它的单侧极限存在且相等,即函数 $f(x)$的右极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(2x+b)=b$,函数 $f(x)$的左极限 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(e^x-1)=0$,故当 $b=0$ 时函数 $f(x)$的极限存在.

5. 已知 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-ax+b}{2-x}=1$，试求 a 与 b 的值.

【解】 由题意知，当 $x\to 2$ 时，有 $2^2-2a+b=0$，即 $b=2a-4$.

又因为

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\frac{x^2-ax+b}{2-x}=1 &\Rightarrow \lim_{x\to 2}\frac{x^2-ax+(2a-4)}{2-x}\\ &\Rightarrow \lim_{x\to 2}\frac{x^2-ax+2x-2x+2a-4}{2-x}=1\\ &\Rightarrow \lim_{x\to 2}\frac{x(x-2)+a(2-x)+2(x-2)}{2-x}=1\\ &\Rightarrow \lim_{x\to 2}\frac{(2-x)(a-x-2)}{2-x}=1\\ &\Rightarrow \lim_{x\to 2}(a-x-2)=1\end{aligned}$$

即当 $x\to 2$ 时，有 $a-2-2=1$，从而得出 $a=5$，$b=6$.

习题 2.3

求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{x}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{\sin 5x}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{x}\right)^x$；

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x$；　　(6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+5}$；

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}$；　　(8) $\lim\limits_{t\to 0}\left(\dfrac{1}{1+t}\right)^{\frac{1}{3t}}$.

【解】 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\cos 2x}\cdot\dfrac{2}{2x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2}{\cos 2x}=1\times\frac{2}{1}=2.$$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x}\cdot\dfrac{2x}{\sin 2x}\cdot\dfrac{3}{2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\dfrac{\sin 2x}{2x}}\cdot\dfrac{3}{2}=\dfrac{3}{2}$.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{\sin 5x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\cos 2x}\cdot\dfrac{1}{\sin 5x}\cdot\dfrac{5x}{2x}\cdot\dfrac{2}{5}=\dfrac{2}{5}$.

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{\dfrac{x}{4}}\right)^{\frac{x}{4}}\right]^4=\mathrm{e}^4$.

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{-x}\right)^{-x}\right]^{-1}=\mathrm{e}^{-1}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

(6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+5}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^5=\mathrm{e}\cdot 1^5=\mathrm{e}$.

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1+1}{n+1}\right)^{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}=\mathrm{e}$.

(8)$\frac{1}{1+t}$的倒数为 $1+t$，而$\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{3t}}=\lim\limits_{t\to 0}[(1+t)^{\frac{1}{t}}]^{\frac{1}{3}}=e^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{e}$，故而有$\lim\limits_{t\to 0}\left(\frac{1}{1+t}\right)^{\frac{1}{3t}}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{e}}=e^{-\frac{1}{3}}$.

习题 2.4

1. 求函数 $y=x^2-\frac{1}{2}x$，当 $x=1,\Delta x=0.5$ 时的改变量.

【解】 令 $y=f(x)=x^2-\frac{1}{2}x,x_0=1,\Delta x=0.5$，则

$$\begin{aligned}\Delta y&=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\\&=\left[(1+0.5)^2-\frac{1}{2}\times(1+0.5)\right]-\left(1^2-\frac{1}{2}\times 1\right)\\&=2.25-0.75-0.5\\&=1\end{aligned}$$

2. 根据定义，证明下列函数在 $x=1$ 处连续.

(1)$f(x)=x+1$；　(2)$f(x)=|x|$；　(3)$f(x)=\begin{cases}2x^2-1, & x\geqslant 1\\ x, & x<1\end{cases}$.

【证明】 (1)$f(x)=x+1$ 在 $x=1$ 处有定义，故有

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}(x+1)=2=f(1)$$

所以，函数 $f(x)=x+1$ 在 $x=1$ 处连续.

(2)$f(x)=|x|$在 $x=1$ 处有定义，故有

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}|x|=1=f(1)$$

所以，函数 $f(x)=|x|$在 $x=1$ 处连续.

(3)$f(x)=\begin{cases}2x^2-1, & x\geqslant 1\\ x, & x<1\end{cases}$ 在 $x=1$ 处有定义，故有

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}(2x^2-1)=2\times 1^2-1=1$$

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}x=1$$

因为 $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)$，所以函数 $f(x)=\begin{cases}2x^2-1, & x\geqslant 1\\ x, & x<1\end{cases}$ 在 $x=1$ 处连续.

3. 求下列函数的极限.

(1)$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-3}{\sqrt{1+x}}$；　(2)$\lim\limits_{x\to 1}(x^2-1)\sin x$；

(3)$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$；　(4)$\lim\limits_{x\to 1}[\sqrt{1+\ln x}+(x-1)^{\frac{3}{2}}]$.

【解】 (1)$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-3}{\sqrt{1+x}}=\frac{2-3}{\sqrt{1+2}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

(2)$\lim\limits_{x\to 1}(x^2-1)\sin x=\lim\limits_{x\to 1}(x^2-1)\cdot\lim\limits_{x\to 1}\sin x=0$.

(3)$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x+2)(x-2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x+2)=4$.

(4) $\lim\limits_{x\to1}\left[\sqrt{1+\ln x}+(x-1)^{\frac{3}{2}}\right]=\lim\limits_{x\to1}\sqrt{1+\ln x}+\lim\limits_{x\to1}(x-1)^{\frac{3}{2}}=1$.

4. 求下列函数的间断点，并说明它是第一类间断点，还是第二类间断点.

(1) $y=\dfrac{1}{x+1}$；　　　　(2) $y=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$.

【解】 (1)根据函数，求出其定义域为 $\{x\mid x\in(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)\}$，故 $y=\dfrac{1}{x+1}$ 的间断点为 -1. 又因为 $\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{1}{x+1}$ 和 $\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{1}{x+1}$ 都不存在，所以 -1 是第二类间断点.

(2)根据函数，求出其定义域为 $\{x\mid x\in(-\infty,1)\cup(1,2)\cup(2,+\infty)\}$，故 $y=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ 的间断点有两个，即 1 和 2.

当 $x=1$ 时，$\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ 和 $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ 都存在，所以 1 是第一类间断点.

当 $x=2$ 时，$\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ 和 $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ 都不存在，所以 2 是第二类间断点.

5. 求证 $x^5-3x=1$ 至少有一个实根介于 1 与 2 之间.

【证明】 令 $f(x)=x^5-3x-1$，显然 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上连续，且有

$$f(1)=1^5-3\times1-1=-3<0$$

$$f(2)=2^5-3\times2-1=25>0$$

由零点定理知，在 $[1,2]$ 上至少有一点 ξ 使得 $f(\xi)=x^5-3x-1=0$，故有方程 $x^5-3x-1=0$ 在 $[1,2]$ 上至少有一个实数根.

复 习 题 二

1. 选择题.

(1)若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A$（$A$ 为有限值），则下列哪个关系非恒成立？（　　）

A. $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]=2A$　　　　B. $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-g(x)]=0$

C. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot g(x)=A^2$　　　　D. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$

(2)当 $x\to x_0$ 时，若函数 $f(x)$（　　）.

A. 不是无穷大，则必为有界　　　　B. 极限不存在，则必为无界

C. 是无界的，则必为无穷大　　　　D. 存在极限，则必有界

(3)当 $x\to0$ 时，无穷小 $\sin(2x^2+x)$ 是 x 的（　　）无穷小.

A. 高阶　　　　B. 低阶

C. 同阶但非等价　　　　D. 等价

【解】 (1)D　　(2)D　　(3)A

2. 填空题.

(1)设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{e}(1+x)^{\frac{1}{x}}, & x\neq0\\ a, & x=0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续，则 a 等于________.

(2)若 $\lim\limits_{x\to0}(1-x)^{\frac{k}{x}}=e^2$，则 k 等于________.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\sin\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\sin x\right)=$________________.

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-5x+1}{2x^2+3}=$________________.

【解】 (1)答案：$a=1$.

解析：若要函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续，则有 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{e}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{e}(1+x)^{\frac{1}{x}}=f(0)$，即 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{e}(1+x)^{\frac{1}{x}}=1=f(0)=a$，故 $a=1$.

(2)答案：$k=-2$.

解析：由重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ 可得

$$\lim_{x\to 0}(1-x)^{\frac{k}{x}}=\lim_{x\to 0}[1+(-x)]^{\frac{1}{(-x)}\cdot(-k)}=e^{-k}=e^2$$

故得 $k=-2$.

(3)答案：2.

解析：根据重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ 可得

$$\lim_{x\to 0}\left(x\sin\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\sin x\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}+\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1+1=2$$

(4)答案：$\frac{3}{2}$.

解析：当 $x\to\infty$ 时，可对原式分子分母同除以 x^2，即有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-5x+1}{2x^2+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}{2+\frac{3}{x^2}}=\frac{3}{2}$$

3. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}\right)$； (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right]$；

(3) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2+2x+5}{x^2+1}$； (4) $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\frac{x^2-3}{x^2+1}$；

(5) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right)$.

【解】 (1)
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n-1}{n^2}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)}{2n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n}{2n^2}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n}}{2}=\frac{1}{2}.$$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n-1}\right)\right]$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n-1}\right)=1.$$

(3) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^2+2x+5}{x^2+1}=\frac{(-1)^2+2\times(-1)+5}{(-1)^2+1}=\frac{1-2+5}{2}=2.$

(4) $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\frac{x^2-3}{x^2+1}=\frac{(\sqrt{3})^2-3}{(\sqrt{3})^2+1}=0.$

(5) $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to1}\frac{2-x-1}{(x+1)(x-1)}=\lim\limits_{x\to1}\left(-\frac{1}{x+1}\right)=-\frac{1}{2}.$

4. 已知$\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+ax+b}{1-x}=5$，求 a 和 b 的值.

【解】 根据题意，当 $x\to1$ 时，$1^2+a+b=0$，从而有 $b=-1-a$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax+b}{1-x}&=\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax-1-a}{1-x}\\&=\lim_{x\to1}\frac{x(x-1)+a(x-1)+(x-1)}{-(x-1)}\\&=\lim_{x\to1}\frac{x+a+1}{-1}\\&=-(1+a+1)\\&=-2-a\end{aligned}$$

又因为$\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+ax+b}{1-x}=5$，故有$-2-a=5$，解得 $a=-7$，$b=6$.

5. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{|x|}, & x\neq0\\ 1, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性.

【解】 判断函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{|x|}, & x\neq0\\ 1, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处是否连续，需要判断函数的左右极限及在 $x=0$ 处的函数值是否相等.

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x}{|x|}=1$$

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{\sin x}{|x|}=1$$

由此可得，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=f(0)=1$. 故函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{|x|}, & x\neq0\\ 1, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续.

6. 确定常数 k 的值，使函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-4}{x-2}, & x\neq2\\ k, & x=2\end{cases}$ 在 $x=2$ 处连续.

【解】 若函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 处连续，则有

$$\lim_{x\to2^+}f(x)=\lim_{x\to2^-}f(x)=f(2)=k$$

很显然，$\lim\limits_{x\to 2^{+}} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^{-}} f(x)=2+2=4$，即 $k=4$.

7.讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 1, & x=0 \end{cases}$ 是否连续，若不连续，指出其间断点，并说明间断点的类型.

【解】 因为 $\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$，所以 $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}=0$，而 $f(0)=1$，所以函数不连续，其间断点为 0，是第二类间断点.

8.证明：方程 $x^3+2x=6$ 在 1 和 3 之间至少有一根.

【证明】 设 $f(x)=x^3+2x-6$，显然 $f(x)$ 在 $[1,3]$ 上连续，有

$$f(1)=1^3+2\times 1-6=-3<0$$

$$f(3)=3^3+2\times 3-6=27>0$$

根据零点定理知：在 $[1,3]$ 上至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=\xi^3+2\xi-6=0$，故方程 $x^3+2x=6$ 在 $[1,3]$ 上至少有一个实数根.

第 3 章　导数与微分

3.1　基 本 要 求

(1)理解导数的定义,知道导数的几何意义,并能够描述函数可导性与连续性的关系.
(2)掌握导数四则运算法则的使用方法.
(3)会使用反函数的求导法则对反函数进行求导.
(4)掌握复合函数的求导法则,并能够利用这些法则对复合函数求导.
(5)了解并掌握隐函数的求导法则.
(6)理解高阶导数的概念,了解二阶导数的物理意义.
(7)理解微分的概念,并能进行微分运算.
(8)掌握微分在近似计算中的应用.

3.2　内 容 提 要

3.2.1　导数的概念

1. 导数的定义

定义 3.1　设函数 $y=f(x)$在点 x_0 的附近有定义,当自变量 x 在点 x_0 处有增量 Δx 时,相应地,函数有增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$. 如果极限$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$存在,则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导,并称此极限值为函数 $y=f(x)$在点 x_0 处的导数,记为

$$f'(x_0),\ y'\big|_{x=x_0},\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=x_0}\text{或}\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=x_0}$$

如果上述极限不存在,则称函数 $y=f(x)$在点 x_0 处不可导.

定义 3.2　若函数 $y=f(x)$在区间(a,b)内每一点处都可导,则称函数 $y=f(x)$在区间(a,b)内可导. 若函数 $y=f(x)$在区间(a,b)内可导,并且在区间的左、右端点处 $f'_+(a)$与 $f'_-(b)$都存在,则称函数 $y=f(x)$在闭区间$[a,b]$上可导. 若函数 $y=f(x)$在某区间内可导,则对于该区间内的每一个 x,都有唯一确定的导数值 $f'(x)$与之对应,这样就确定了一个新的函数,称为函数 $y=f(x)$的导函数,简称导数,记作 $f'(x)$,y',$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$或$\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$.

由导数的定义，若函数 $y=f(x)$ 在某区间 I 上可导，则函数 $y=f(x)$ 在 I 上的导函数为

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\text{或}f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

显然，函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 就是导函数 $f'(x)$ 在点 x_0 处的函数值，即

$$f'(x_0)=f'(x)\big|_{x=x_0}$$

定义 3.3 如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

与

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则称它们分别为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的左导数和右导数，分别记作 $f'_-(x_0)$ 和 $f'_+(x_0)$.

显然，函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导的充分必要条件是函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的左导数和右导数都存在且相等，即 $f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$.

2. 导数的几何意义

函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 在几何上表示曲线 $y=f(x)$ 在点 $M[x_0,f(x_0)]$ 处的切线的斜率，即

$$f'(x_0)=\tan\alpha$$

其中，α 是切线的倾斜角.

3. 函数可导性与连续性的关系

定理 3.1 如果函数 $y=f(x)$ 在点 x 处可导，则函数在该点必连续.

应注意，函数可导必连续，但函数连续不一定可导.

3.2.2 求导法则

1. 导数的四则运算法则

定理 3.2 设函数 $u(x)$，$v(x)$ 在点 x 处可导，则它们的和、差、积、商（除分母为零的点外）都在点 x 处具有导数，且有以下法则.

(1) $[u(x)\pm v(x)]'=u'(x)\pm v'(x)$.

(2) $[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$.

(3) $\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]'=\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}[v(x)\neq 0]$.

推论 3.1 $[Cu(x)]'=Cu'(x)$（C 为常数）.

推论 3.2 $\left[\dfrac{1}{u(x)}\right]'=-\dfrac{u'(x)}{u^2(x)}$.

推论 3.3 $[u(x)v(x)w(x)]'=u'(x)v(x)w(x)+u(x)v'(x)w(x)+u(x)v(x)w'(x)$.

2. 反函数的求导法则

定理 3.3 设 $y=f(x)$ 单调、可导且 $f'(x)\neq 0$，则它的反函数 $x=\varphi(y)$ 也可导，且有

$\varphi'(y)=\dfrac{1}{f'(x)}$，即$\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{\frac{dy}{dx}}$.

3. 复合函数的求导法则

定理 3.4(链式法则)　若函数 $u=\varphi(x)$在点 x 处可导，函数 $y=f(u)$在点 $u=\varphi(x)$处可导，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$在点 x 处可导，且有

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}\text{或}\{f[\varphi(x)]\}'=f'(u)\varphi'(x)$$

4. 隐函数的求导法则

在实际问题中，常常碰到一些函数是由方程 $F(x,y)=0$ 确定的，这样的函数称为隐函数. 把一个隐函数化成显函数，叫作隐函数的显化.

设函数 $y=f(x)$是由 $F(x,y)=0$ 所确定的隐函数，则 $F[x,f(x)]=0$. 由于此式左端是将 $y=f(x)$代入 $F(x,y)$所得到的复合函数，因此，根据链式法则将等式两边对 x 求导，便可得到所求的导数.

3.2.3　高阶导数

定义 3.4　若函数 $y=f(x)$的导数 $y'=f'(x)$仍是 x 的可导函数，则称 $f'(x)$的导数为 $f(x)$的二阶导数，记作 y''，$f''(x)$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$或$\dfrac{d^2f}{dx^2}$.

类似地，二阶导数的导数叫作三阶导数，记作 y'''或$\dfrac{d^3y}{dx^3}$；三阶导数的导数叫作四阶导数，记作 $y^{(4)}$或$\dfrac{d^4y}{dx^4}$. 一般地，$n-1$ 阶导数的导数叫作 $f(x)$的 n 阶导数，记作 $y^{(n)}$或$\dfrac{d^ny}{dx^n}$.

二阶或二阶以上的导数统称为高阶导数. 相应地，函数 $y=f(x)$的导数 $y'=f'(x)$叫作函数 $f(x)$的一阶导数. 显然，求高阶导数就是多次连续求导.

3.2.4　函数的微分

1. 微分的概念

设函数 $y=f(x)$在某区间内有定义，x_0 及 $x_0+\Delta x$ 在该区间内，如果函数的增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$可表示为

$$\Delta y=A\cdot\Delta x+o(\Delta x)$$

其中 A 是与 Δx 无关的常数，则称函数 $y=f(x)$在点 x_0 处可微，并称 $A\cdot\Delta x$ 为函数 $y=f(x)$在点 x_0 处相应于自变量增量 Δx 的微分，记为 $dy\Big|_{x=x_0}$，即

$$dy\Big|_{x=x_0}=A\cdot\Delta x$$

定理 3.5　函数 $y=f(x)$在点 x_0 处可微的充分必要条件是函数 $y=f(x)$在点 x_0 处可导，且当 $f(x)$在点 x_0 处可微时，其微分为

$$dy\Big|_{x=x_0}=f'(x_0)\Delta x$$

2. 微分的运算

微分运算法则如下.

(1) $\mathrm{d}[u(x)\pm v(x)]=\mathrm{d}u(x)\pm \mathrm{d}v(x)$.

(2) $\mathrm{d}[u(x)v(x)]=v(x)\mathrm{d}u(x)+u(x)\mathrm{d}v(x)$.

(3) $\mathrm{d}[Cu(x)]=C\mathrm{d}u(x)$($C$ 为常数).

(4) $\mathrm{d}\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]=\dfrac{v(x)\mathrm{d}u(x)-u(x)\mathrm{d}v(x)}{v^2(x)}[v(x)\neq 0]$.

(5) $\mathrm{d}[f(g(x))]=f'[g(x)]g'(x)\mathrm{d}x$.

这里,公式(5)是复合函数的微分法则.

3. 微分在近似计算中的应用

根据微分的概念可知,如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可微,且 $|\Delta x|$ 较小时,Δy 近似等于 $\mathrm{d}y$,即

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx f'(x_0)\Delta x$$

则

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$$

在上式中,令 $x=x_0+\Delta x$,即 $\Delta x=x-x_0$,得

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

如果 $f(x_0)$ 和 $f'(x_0)$ 都容易求得,那么可以利用公式进行近似计算.

3.3 习题解答

习题 3.1

1. 用导数定义求下列函数的导数.

(1) $f(x)=x^2-5x$; (2) $f(x)=\ln x$;

(3) $f(x)=\dfrac{1}{x}$; (4) $f(x)=\sqrt{x}$.

【解】 (1)根据导数的定义,有

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2-5(x+\Delta x)-(x^2-5x)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x\Delta x-5\Delta x+\Delta x^2}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}(2x-5+\Delta x)\\&=2x-5\end{aligned}$$

(2)根据导数的定义,有

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln(x+\Delta x)-\ln x}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}$$

$$=\ln\lim_{\Delta x\to 0}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}\cdot\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}$$

(3)根据导数的定义,有

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-1}{x(x+\Delta x)}$$

$$=-\frac{1}{x^2}$$

(4)根据导数的定义,有

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

2.假设 $f'(x_0)$存在,求下列各式的极限值.

(1)$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$;　　(2)$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}$.

【解】　(1)$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=-\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f[x_0+(-\Delta x)-f(x_0)]}{-\Delta x}=-f'(x_0)$.

(2)
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)-[f(x_0-h)-f(x_0)]}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h}$$

$$=f'(x_0)+\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h}$$

$$=f'(x_0)+f'(x_0)$$

$$=2f'(x_0).$$

3.求曲线 $f(x)=x^3+2x$ 在点(1,3)处的切线方程和法线方程.

【解】　所求切线的斜率为

$$k=(x^3+2x)'|_{x=1}=(3x^2+2)|_{x=1}=5$$

所以,切线方程为 $y-3=5(x-1)$,即 $y=5x-2$.

法线方程为 $y-3=-\frac{1}{5}(x-1)$,即 $y=-\frac{1}{5}x+\frac{16}{5}$.

4.讨论下列函数在 $x=0$ 处的连续性与可导性.

(1)$f(x)=x|x|$;　　(2)$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0\\ xe^x, & x<0\end{cases}$.

【解】 (1)由$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}x|x|=0=f(0)$可知,$f(x)=x|x|$在$x=0$处连续.由左、右导数的定义,有

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x|x|}{x}=\lim_{x\to 0^-}|x|=0$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x|x|}{x}=\lim_{x\to 0^+}|x|=0$$

因为$f'_-(0)=f'_+(0)$,所以函数$f(x)$在$x=0$处可导.

(2)由

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}xe^x=0$$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}x^2=0$$

可以得到,$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)$,故函数$f(x)$在$x=0$处连续.

由左、右导数的定义,有

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{xe^x}{x}=\lim_{x\to 0^-}e^x=1$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to 0^+}x=0$$

因为$f'_-(0)\neq f'_+(0)$,所以函数$f(x)$在$x=0$处不可导.

习题 3.2

1.用导数的四则运算法则求下列函数的导数.

(1)$y=2x^3-x+2+x^{-3}$;　(2)$y=\dfrac{1+x}{1-x}$;　(3)$y=x\ln x$;

(4)$y=3e^x\ln x$;　(5)$y=\ln x^2+x^3\ln x$　(6)$y=x^2\arctan x$;

(7)$y=\sqrt{1+\ln x}$;　(8)$y=e^{\cos x}$;　(9)$y=e^x\sin e^x+\cos e^x$;

(10)$y=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$.

【解】 (1)$y'=6x^2-1-3x^{-4}=6x^2-\dfrac{3}{x^4}-1$.

(2)$y'=\dfrac{(1+x)'(1-x)-(1+x)(1-x)'}{(1-x)^2}=\dfrac{1-x+1+x}{(1-x)^2}=\dfrac{2}{(1-x)^2}$.

(3)$y'=x'\ln x+x(\ln x)'=\ln x+1$.

(4)$y'=3[(e^x)'\ln x+e^x(\ln x)']=3e^x\ln x+\dfrac{3e^x}{x}$.

(5)$y'=\dfrac{2x}{x^2}+3x^2\ln x+x^2=\dfrac{2}{x}+x^2(3\ln x+1)$.

(6)$y'=2x\arctan x+\dfrac{x^2}{1+x^2}$.

(7) $y'=\frac{1}{2}(1+\ln x)^{-\frac{1}{2}}\cdot(1+\ln x)'=\frac{1}{2x\sqrt{1+\ln x}}$.

(8) $y'=e^{\cos x}\cdot(\cos x)'=-\sin x\cdot e^{\cos x}$.

(9) $y'=e^x\sin e^x+e^x(\sin e^x)'+(-\sin e^x)\cdot(e^x)'=e^{2x}\cos e^x$.

(10) $y'=\frac{(x+\sqrt{x^2+a^2})'}{x+\sqrt{x^2+a^2}}=\frac{1+\frac{1}{2}(x^2+a^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(x^2+a^2)'}{x+\sqrt{x^2+a^2}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$.

2. 求下列方程所确定的隐函数的导数$\frac{dy}{dx}$.

(1) $3x^2+2y^3-5=0$;　　(2) $\ln y=xy+\cos x$.

【解】 (1)等式两边同时对 x 求导,有

$$6x+6y^2\frac{dy}{dx}=0$$

故$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y^2}$.

(2)等式两边同时对 x 求导,有

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=y+x\frac{dy}{dx}-\sin x$$

故$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2-y\sin x}{1-xy}$.

习题 3.3

求下列函数的二阶导数.

(1) $y=\ln(1+x^2)$;　(2) $y=\sin 2x\cdot e^x$;　(3) $y=x\cos x$;

(4) $y=\frac{1}{1-x^2}$;　(5) $y=x^2e^x$;　(6) $y=\cos x\ln x$;

(7) $y=x\ln x$;　(8) $y=\frac{e^x}{x}$;　(9) $y=e^{-x}\sin x$;

(10) $y=e^{2x-1}$.

【解】 (1) $y'=\frac{2x}{1+x^2}$.

$$y''=\frac{2(1+x^2-4x^2)}{(1+x^2)^2}=\frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}.$$

(2) $y'=2\cos 2x\cdot e^x+\sin 2x\cdot e^x$.

$$\begin{aligned}y''&=-4\sin 2x\cdot e^x+2\cos 2x\cdot e^x+2\cos 2x\cdot e^x+\sin 2x\cdot e^x\\&=4\cos 2x\cdot e^x-3\sin 2x\cdot e^x\\&=e^x(4\cos 2x-3\sin 2x).\end{aligned}$$

(3) $y'=\cos x-x\sin x$.

$$y''=-\sin x-(\sin x+x\cos x)=-2\sin x-x\cos x.$$

(4) $y'=\dfrac{2x}{(1-x^2)^2}$.

$y''=\dfrac{2(1-x^2)^2-2x[(1-x^2)^2]'}{(1-x^2)^4}$

$=\dfrac{2(1-x^2)^2+8x^2(1-x^2)}{(1-x^2)^4}$

$=\dfrac{2(1-x^2)(3x^2+1)}{(1-x^2)^4}$

$=\dfrac{2(3x^2+1)}{(1-x^2)^3}$.

(5) $y'=2xe^x+x^2e^x$.

$y''=2e^x+2xe^x+2xe^x+x^2e^x=(x^2+4x+2)e^x$.

(6) $y'=-\sin x\ln x+\dfrac{\cos x}{x}$.

$y''=-\left(\cos x\ln x+\dfrac{\sin x}{x}\right)+\dfrac{-x\sin x-\cos x}{x^2}$

$=\dfrac{-x^2\cos x\ln x-2x\sin x-\cos x}{x^2}$.

(7) $y'=\ln x+1$.

$y''=\dfrac{1}{x}$.

(8) $y'=\dfrac{e^x x-e^x}{x^2}$.

$y''=\dfrac{(e^x x-e^x)'x^2-(e^x x-e^x)2x}{x^4}$

$=\dfrac{x^3e^x-2x^2e^x+2xe^x}{x^4}$

$=\dfrac{e^x(x^2-2x+2)}{x^3}$.

(9) $y'=-e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x$.

$y''=-(-e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x)+(-e^{-x}\cos x-e^{-x}\sin x)$

$=e^{-x}\sin x-e^{-x}\cos x-e^{-x}\cos x-e^{-x}\sin x$

$=-2e^{-x}\cos x$.

(10) $y'=2e^{2x-1}$.

$y''=2e^{2x-1}(2x-1)'=4e^{2x-1}$.

习题 3.4

1. 已知 $y=x^2-x$，计算当 $x=2,\Delta x=0.01$ 时的 Δy 及 dy.

【解】 $\Delta y=(x+\Delta x)^2-(x+\Delta x)-x^2+x$

$=2.01^2-2.01-4+2$

$=0.0301$.

$dy=y'_x|_{x=2}\cdot\Delta x=2x-1|_{x=2}\times 0.01=0.03$.

2. 求下列函数的微分.

(1) $y=\frac{2}{x}+2\sqrt{x}$；　(2) $y=(x-2)e^x$；　(3) $y=\sin^2(x^2+2)$；

(4) $y=3x\sin 5x$；　(5) $y=[\ln(2+x)]^2$；　(6) $y=\ln[\ln(\ln x)]$；

(7) $y=\arctan(2+x^2)$；　(8) $y=\arcsin 2x^3$.

【解】 (1)因为 $y'=\frac{-2}{x^2}+\frac{1}{\sqrt{x}}$,所以 $dy=\frac{x\sqrt{x}-2}{x^2}dx$.

(2)因为 $y'=e^x+(x-2)e^x=e^x(x-1)$,所以 $dy=e^x(x-1)dx$.

(3)因为

$$\begin{aligned}y'&=2\sin(x^2+2)[\sin(x^2+2)]'\\&=2\sin(x^2+2)\cos(x^2+2)(x^2+2)'\\&=2\sin(x^2+2)\cos(x^2+2)\cdot 2x\\&=4x\sin(x^2+2)\cos(x^2+2)\end{aligned}$$

所以 $dy=4x\sin(x^2+2)\cos(x^2+2)dx$.

(4)因为

$$y'=3\sin 5x+3x\cos 5x\cdot 5=3\sin 5x+15x\cos 5x$$

所以 $dy=(3\sin 5x+15x\cos 5x)dx$.

(5)因为

$$y'=2\ln(2+x)[\ln(2+x)]'=2\ln(2+x)\frac{1}{2+x}$$

所以 $dy=\frac{2\ln(2+x)}{2+x}dx$.

(6)因为

$$y'=\frac{1}{\ln(\ln x)}[\ln(\ln x)]'=\frac{1}{\ln(\ln x)}\cdot\frac{1}{\ln x}(\ln x)'=\frac{1}{x\ln x\ln(\ln x)}$$

所以

$$dy=\frac{1}{x\ln x\ln(\ln x)}dx$$

(7)因为

$$y'=\frac{1}{1+(2+x^2)^2}(2+x^2)'=\frac{2x}{1+(2+x^2)^2}=\frac{2x}{5+4x^2+x^4}$$

所以 $dy=\frac{2x}{5+4x^2+x^4}dx$.

(8)因为 $y'=\frac{1}{\sqrt{1-(2x^3)^2}}(2x^3)'=\frac{6x^2}{\sqrt{1-4x^6}}$,所以 $dy=\frac{6x^2}{\sqrt{1-4x^6}}dx$.

3. 计算下列各式的近似值.

(1) $\cos 29°$；　(2) $e^{-0.002}$.

【解】 (1)根据 $f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$,取 $f(x)=\cos x$,则有

$$\cos x\approx\cos x_0-\sin x_0(x-x_0)$$

令 $x_0=\frac{\pi}{6}, x=\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{180}$，于是

$$\begin{aligned}\cos 29^\circ &\approx \cos\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{6}\cdot\left(-\frac{\pi}{180}\right)\\ &\approx\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{180}\\ &\approx 0.8747\end{aligned}$$

(2)根据 $f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$，取 $x_0=0$，有

$$f(x)\approx f(0)+f'(0)x$$

对于 $f(x)=e^x$，有

$$f(0)=f'(0)=e^0=1$$

所以 $e^x\approx 1+x$，由此得 $e^{-0.002}\approx 1-0.002=0.998$.

复 习 题 三

1. 选择题.

(1)设 $f(x)$在点 x_0 处可导，则$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=$(　　).

A. $-f'(x_0)$　　B. $f'(-x_0)$

C. $f'(x_0)$　　D. $2f'(x_0)$

(2)函数 $f(x)$在点 x_0 处连续，是函数 $f(x)$在点 x_0 处可导的(　　).

A. 必要不充分条件　　B. 充分不必要条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

(3)曲线 $y=2x^3-5x^2+4x-5$ 在点$(2,-1)$处的切线的斜率等于(　　).

A. 8　　B. 12

C. -6　　D. 6

(4)设 $y=e^{f(x)}$ 且 $f(x)$二阶可导，则 $y''=$(　　).

A. $e^{f(x)}$　　B. $e^{f(x)}\cdot f''(x)$

C. $e^{f(x)}[f'(x)f''(x)]$　　D. $e^{f(x)}\{[f'(x)]^2+f''(x)\}$

(5)若 $f(x)=\begin{cases}e^{ax}, & x<0\\ b+\sin 2x, & x\geqslant 0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处可导，则 a,b 的值应为(　　).

A. $a=2,b=1$　　B. $a=1,b=2$

C. $a=-2,b=1$　　D. $a=2,b=-1$

【解】 (1)A　(2)A　(3)A　(4)D　(5)A

2. 填空题.

(1)设函数 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$，则 $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=$________.

(2)设函数 $y=y(x)$由方程 $xy-e^x+e^y=0$ 确定，则 $y'(0)=$________.

(3)若函数 $y=e^x(\cos x+\sin x)$，则 $dy=$________.

(4)设 $y=\ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x^2}}$,则 $y''|_{x=0}=$________________.

(5)曲线 $y=\ln x$ 在点 $P(\mathrm{e},1)$处的切线方程为________________.

【解】 (1)答案:-2.

解析:令 $u=2x+\dfrac{\pi}{2}$,则可将原函数看成由 $y=\sin u$ 和 $u=2x+\dfrac{\pi}{2}$复合而成,故

$$f'(x)=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=(\sin u)'\cdot\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)'=\cos u\cdot 2=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$$

当取 $x=\dfrac{\pi}{4}$时,有 $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=2\cos\left(2\times\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}\right)=2\cos\pi=-2$.

(2)答案:$\dfrac{1-y}{\mathrm{e}^y}$.

解析:方程两边同时对 x 求导,并注意到 y 是 x 的函数,于是有

$$y+xy'-\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y y'=0$$

解得

$$y'=\frac{\mathrm{e}^x-y}{\mathrm{e}^y+x}$$

将 $x=0$ 代入上式,即得 $y'(0)=\dfrac{\mathrm{e}^0-y}{\mathrm{e}^y+0}=\dfrac{1-y}{\mathrm{e}^y}$.

(3)答案:$\mathrm{d}y=2\mathrm{e}^x\cos x\mathrm{d}x$.

解析:方程两边同时对 x 求导,并注意到 y 是 x 的函数,于是有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}&=(\mathrm{e}^x)'(\cos x+\sin x)+\mathrm{e}^x(\cos x+\sin x)'\\&=\mathrm{e}^x(\cos x+\sin x)+\mathrm{e}^x(-\sin x+\cos x)\\&=2\mathrm{e}^x\cos x\end{aligned}$$

(4)答案:$-\dfrac{3}{2}$.

解析:因为 $y=\ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x^2}}=\dfrac{1}{2}[\ln(1-x)-\ln(1+x^2)]$,所以

$$\begin{aligned}y'&=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-x}(1-x)'-\frac{1}{1+x^2}(1+x^2)'\right]\\&=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{2x}{1+x^2}\right)\end{aligned}$$

进一步对 x 求导,得

$$\begin{aligned}y''&=-\frac{1}{2}\left[\frac{1'\cdot(1-x)-1\cdot(1-x)'}{(1-x)^2}+2\cdot\frac{x'(1+x^2)-x(1+x^2)'}{(1+x^2)^2}\right]\\&=-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(1-x)^2}+2\cdot\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\right]\end{aligned}$$

故有

$$y''|_{x=0}=-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(1-0)^2}+2\times\frac{1-0^2}{(1+0^2)^2}\right]$$
$$=-\frac{1}{2}(1+2)=-\frac{3}{2}$$

(5)答案：$y=\frac{1}{e}x$.

解析：令 $y=f(x)=\ln x$，则在点 $P(e,1)$处的切线的斜率为 $y'=(\ln x)'=\frac{1}{e}$. 根据曲线在一点的切线方程 $f(x)-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$有

$$y-\ln e=\frac{1}{e}(x-e)$$

即切线方程为 $y=\frac{1}{e}x$.

3. 已知 $y=x\arctan x-\ln\sqrt{1+x^2}$，求$\frac{dy}{dx}$.

【解】 $\frac{dy}{dx}=\arctan x+\frac{x}{1+x^2}-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

$=\arctan x+\frac{x}{1+x^2}-\frac{x}{1+x^2}$

$=\arctan x$.

4. 求下列函数的二阶导数.

(1)$y=\sin 3x$；　　(2)$y=x^3\ln x^2$.

【解】 (1)$y'=(\sin 3x)'=\cos 3x\cdot(3x)'=3\cos 3x$.

$y''=(3\cos 3x)'=-9\sin 3x$.

(2)$y'=(x^3)'\cdot\ln x^2+x^3\cdot(\ln x^2)'=3x^2\ln x^2+2x^2$.

$y''=(3x^2\ln x^2+2x^2)'=(3x^2)'\ln x^2+3x^2\cdot(\ln x^2)'+(2x^2)'=6x\ln x^2+10x$.

5. 已知 $y=x^2-x$，求在 $x=2$ 处，当 $\Delta x=0.1$ 时，Δy 和 dy 的值.

【解】 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$

$=[(2+0.1)^2-(2+0.1)]-(2^2-2)$

$=(4.41-2.1)-2$

$=2.31-2$

$=0.31$.

$dy=y'_x|_{x=2}\cdot\Delta x=(2x-1)|_{x=2}\times0.1=0.3$.

6. 讨论下列函数在 $x=0$ 处的连续性与可导性.

(1)$y=|\sin x|$；　　(2)$y=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x}, & x\neq0\\ 0, & x=0\end{cases}$.

【解】 (1)因为

$$\lim_{x\to0^-}|\sin x|=\lim_{x\to0^+}|\sin x|=0=f(0)$$

所以，$y=|\sin x|$在 $x=0$ 处连续.

因为

$$f'_{-}(0)=\lim_{x\to 0^{-}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^{-}}\frac{|\sin x|}{x}=-1$$

$$f'_{+}(0)=\lim_{x\to 0^{+}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^{+}}\frac{|\sin x|}{x}=1$$

所以，$f'_{-}(0)\neq f'_{+}(0)$. 故 $y=|\sin x|$ 在 $x=0$ 处不可导.

(2)因为

$$\lim_{x\to 0^{-}}x\sin\frac{1}{x}=\lim_{x\to 0^{+}}x\sin\frac{1}{x}=0=f(0)$$

所以，$y=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续.

因为

$$f'_{-}(0)=\lim_{x\to 0^{-}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^{-}}\sin\frac{1}{x}\text{，极限不存在}$$

$$f'_{+}(0)=\lim_{x\to 0^{+}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^{+}}\sin\frac{1}{x}\text{，极限不存在}$$

即左、右导数均不存在，故 $y=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处不可导.

7. 已知 $y=x+x^{x}$，求 y'.

【解】 原方程可变换为 $y-x=x^{x}$，对等式两边取以 e 为底的对数得

$$\ln(y-x)=x\ln x$$

上式两边同时对 x 求导，得

$$\frac{1}{y-x}(y'-1)\ln x+1\Rightarrow y'-1=(\ln x+1)(y-x)$$

所以

$$y'=y\ln x-x\ln x+y-x+1$$

8. 设由方程 $e^{y}+\sin(xy^{2})=x+y$ 确定 y 是 x 的函数，求 y'.

【解】 方程两边同时对 x 求导数，得

$$e^{y}y'+\cos(xy^{2})(y^{2}+2xyy')=1+y'$$

即

$$y'[e^{y}+2xy\cos(xy^{2})-1]=1-y^{2}\cos(xy^{2})$$

故

$$y'=\frac{1-y^{2}\cos(xy^{2})}{e^{y}+2xy\cos(xy^{2})-1}$$

9. 求曲线 $y=e^{x}-3\sin x+1$ 在点(0,2)处的切线方程与法线方程.

【解】 切线的斜率为

$$k=y'_{x}|_{x=0}=(e^{x}-3\cos x)|_{x=0}=-2$$

所以，切线方程为

$$y=-2x+2$$

法线方程为

$$y=\frac{1}{2}x+2$$