第 6 单元　数　　列

引　例

我国古代算书《孙子算经》有个有趣的题目“出门望九堤”：今有出门望九堤，堤有九木，木有九枝，枝有九巢，巢有九禽，禽有九雏，雏有九毛，毛有九色. 问各几何?

题目的意思是：“某人走出门外，望见前方有 9 条堤岸，每条堤岸上有 9 棵树木，每棵树上有 9 根树枝，每根树枝上有 9 个鸟巢，每个鸟巢里有 9 只大鸟，每只大鸟都孵出了 9 只小鸟，每只小鸟都长出了 9 根羽毛，每根羽毛上都有 9 种颜色. 问这个人望见的树、枝、巢、大鸟、小鸟、小鸟羽毛及羽毛上的颜色各是多少?”

6.1　数列的概念

6.1.1　数列的基本概念

先看几个例子，将正整数从小到大排成一列数为

$$1,2,3,4,5,\cdots;$$

将上列数的倒数排成一列新的数为

$$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\cdots;$$

将 2 的正整数指数幂从小到大排成一列数为

$$2,2^2,2^3,2^4,2^5,\cdots.$$

想一想

数列 1,2,3,4,5 与数列 5,4,3,2,1 是否为同一个数列?

在上面的例子中,按照一定的顺序排成的一列数叫作**数列**. 数列中的每个数都叫作这个数列的**项**. 在一个数列中,从开始的项起,自左至右排序,各项按照其位置依次叫作这个数列的第 1 项(首项),第 2 项,第 3 项,…,第 n 项,…. 其中反映各项在数列中位置的数字 $1,2,3,\cdots,n,\cdots$分别叫作对应项的**项数**.

只有有限项的数列叫作**有穷数列**,有无限多项的数列叫作**无穷数列**. 如引言中的树、枝、巢、大鸟、小鸟、小鸟羽毛及羽毛上的颜色的数量构成的数列即为有穷数列.

做一做

写出下列各组数列,并指出哪些数列是有穷数列,哪些数列是无穷数列.

(1)自然数 1,2,3,4,5 的平方组成的一列数;

(2)整数 −5,−4,−3,−2,−1,0 的绝对值组成的一列数;

(3)正整数 1,2,3,4,5,…的立方组成的一列数.

6.1.2 数列的通项公式

由于数列的项都是按一定的顺序排列的,则每项都占有一个不同的序号. 因此,在一个数列中,每项与它的序号都有一一对应的关系.

数列的一般形式可以写作

$$a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots(n\in\mathbf{N}^*),$$

记作$\{a_n\}$,其中下脚标的数字代表项数. 因此,通常把第 n 项 a_n 叫作数列$\{a_n\}$的**通项**或**一般项**.

例如,数列 $1,2,3,\cdots,n,\cdots$ 可以简记为 $\{n\}$;数列 $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$ 可以简记为 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$.

如果数列 $\{a_n\}$ 的第 n 项 a_n 能够用关于项数 n 的一个式子来表示,那么这个式子叫作这个数列的**通项公式**.

例如,数列 $2,3,4,5,\cdots$ 的通项公式是 $a_n=n+1$,可以记为 $\{n+1\}$;

数列 $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\cdots$ 的通项公式是 $a_n=\frac{1}{n+1}$,可以记为 $\left\{\frac{1}{n+1}\right\}$;

数列 $2,2^2,2^3,2^4,2^5,\cdots$ 的通项公式是 $a_n=2^n$,可以记为 $\{2^n\}$.

知道了一个数列的通项公式后,只要用正整数 $1,2,3,\cdots$ 依次代替公式中的 n,就可以求出这个数列的每项.

议一议

由数列的有限项探求通项公式时,通项公式的答案是唯一的吗?举例讨论一下.

例 1 设数列的通项公式为 $a_n=\frac{n}{n+1}$,写出数列的前 5 项.

解 $a_1=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2},a_2=\frac{2}{2+1}=\frac{2}{3},a_3=\frac{3}{3+1}=\frac{3}{4},$

$a_4=\frac{4}{4+1}=\frac{4}{5},a_5=\frac{5}{5+1}=\frac{5}{6}.$

例 2 写出数列的通项公式,使它的前 4 项分别为下列各数:

(1) $5,10,15,20$;　　　　(2) $\frac{1}{1},\frac{1}{3},\frac{1}{5},\frac{1}{7}$.

解 (1)这个数列的前 4 项都是 5 与项数的乘积,所以它的一个通项公式为

$$a_n=5n.$$

(2)这个数列的前 4 项分别为奇数的倒数,所以它的一个通项公式为

$$a_n=\frac{1}{2n-1}.$$

例 3 判断 16 和 47 是否为数列 $\{5n+1\}$ 中的项,如果是,请指出是第几项.

解 数列的通项公式为 $a_n=5n+1$,将 16 代入数列的通

项公式，有

$$16=5n+1,$$

解得 $$n=3\in\mathbf{N}^*.$$

所以，16 是数列$\{5n+1\}$中的第 3 项.

将 47 代入数列的通项公式，有

$$47=5n+1,$$

解得 $$n=\frac{46}{5}\notin\mathbf{N}^*,$$

所以，47 不是数列$\{5n+1\}$中的项.

做一做

1. 根据下列各数列的通项公式写出数列的前 5 项：

(1)$a_n=10n$；

(2)$a_n=3^n+1$；

(3)$a_n=5\times(-1)^{n+1}$.

2. 根据下列数列的前 4 项写出数列的一个通项公式：

(1)4，9，16，25；

(2)$\frac{1}{2},\frac{3}{4},\frac{5}{6},\frac{7}{8}$；

(3)$-\frac{1}{3},\frac{1}{6},-\frac{1}{9},\frac{1}{12}$.

习题 6.1

1. 已知各数列的通项公式，分别写出各数列的前 5 项：

(1)$a_n=5(n+3)$；　　(2)$a_n=(-1)^{n-1}n^3$；

(3)$a_n=\frac{2n+1}{2^n}$；　　(4)$a_n=\sin\frac{n\pi}{2}$.

2. 根据下列各数列的前 5 项写出数列的通项公式：

(1)$\sqrt{2},-\sqrt{3},\sqrt{4},-\sqrt{5},\sqrt{6}$；

(2)$\frac{1}{1\times2},\frac{1}{2\times3},\frac{1}{3\times4},\frac{1}{4\times5},\frac{1}{5\times6}$;

(3)$\frac{2^2-1}{2},\frac{3^2-1}{3},\frac{4^2-1}{4},\frac{5^2-1}{5},\frac{6^2-1}{6}$.

3. 已知数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\frac{2n-1}{n+2}$,求a_5和a_{12}.

4. 判断22是否为数列$\{n^2-n-20\}$中的项,如果是,请指出是第几项.

6.2 等差数列

6.2.1 等差数列的概念

将正整数中3的倍数从小到大排列,组成数列

$$3,6,9,12,15,\cdots;$$

将正偶数从小到大排列,组成数列

$$2,4,6,8,\cdots.$$

在第一个数列中,从第2项起,数列中的每一项与它前一项的差都为3;在第二个数列中,从第2项起,数列中的每一项与它前一项的差都为2.因此,这两个数列有一个共同点:从数列的第2项起,数列中的每一项与它前一项的差都为同一个常数.

一般地,如果数列

$$a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$$

从第2项起,每一项与它前一项的差都等于同一个常数,那么这个数列叫作**等差数列**.常数叫作等差数列的**公差**,一般用字母d表示.

由定义可知,若数列$\{a_n\}$为等差数列,d为公差,则$a_{n+1}-a_n=d$,即

$$a_{n+1}=a_n+d. \qquad (6\text{-}1)$$

想一想

如果等差数列$a_1,a_2,\cdots,a_n$的公差为d,那么数列$a_n,a_{n-1},\cdots,a_2,a_1$是否为等差数列?如果是等差数列,则公差是多少?

在上面的例子中，两个数列都为等差数列，公差分别为 3 和 2.

例 1 已知等差数列的首项为 12，公差为 $d=-3$，试写出这个数列的第 2 项和第 5 项.

解 由于 $a_1=12$，$d=-3$，因此

$$a_2=a_1+d=12+(-3)=9,$$
$$a_3=a_2+d=9+(-3)=6,$$
$$a_4=a_3+d=6+(-3)=3,$$
$$a_5=a_4+d=3+(-3)=0.$$

做一做

1. 已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，$a_6=8$，公差 $d=-2$，写出这个数列的第 10 项.
2. 写出等差数列 16，12，8，4，…的第 8 项.

6.2.2 等差数列的通项公式

设数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，且公差为 d，则

$$a_1=a_1,$$
$$a_2=a_1+d,$$
$$a_3=a_2+d=(a_1+d)+d=a_1+2d,$$
$$a_4=a_3+d=(a_1+2d)+d=a_1+3d,$$
……

由此可知，首项为 a_1，公差为 d 的等差数列的通项公式为

$$a_n=a_1+(n-1)d. \tag{6-2}$$

注 意

在等差数列的通项公式中有 4 个量 a_1，d，n，a_n，只要知道其中的任意三个量，就可以求出另外一个量.

例 2 已知等差数列的首项为 2，公差为 -3，试写出这个数列的通项公式，并求出这个数列的第 5 项和第 10 项.

解 由于 $a_1=2$，$d=-3$，则通项公式为

$$a_n=a_1+(n-1)d=2+(n-1)\times(-3)=-3n+5,$$

即 $a_n=-3n+5$. 因此

$$a_5=(-3)\times5+5=-10,$$
$$a_{10}=(-3)\times10+5=-25.$$

例 3　在等差数列$\{a_n\}$中，$a_{50}=25$，公差 $d=1$，求数列的首项 a_1.

解　设数列$\{a_n\}$的通项公式为

$$a_n=a_1+(n-1)d.$$

将 $a_{50}=25$，$d=1$ 代入得

$$25=a_1+(50-1)\times1,$$

解得 $a_1=-24$.

一般地，如果在 a 与 b 之间插入一个数 c，使得 a，b，c 成等差数列，那么 c 叫作 a 与 b 的**等差中项**.

如果 c 是 a 与 b 的等差中项，那么 $c-a=b-c$，即 $2c=a+b$，所以 $c=\frac{a+b}{2}$.

由等差中项的定义可知，在一个等差数列中，从第 2 项起，每一项(有穷数列的最后一项除外)都是它前一项与后一项的等差中项.

做一做

1. 下列数列是否为等差数列，若是等差数列，请求出公差和通项公式：

(1)-2，2，6，10，14，…；

(2)1，4，16，64，256，…；

(3)3，3，3，3，3，…；

(4)1，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{5}$，….

2. 求等差数列 10，7，4，1，…的公差、通项公式及第 15 项.

3. 在等差数列$\{a_n\}$中，$a_5=0$，$a_{10}=10$，求 a_1 和公差 d 的值.

4. 在等差数列$\{a_n\}$中，$a_5=-3$，$a_9=-15$，判断-48是否为数列中的项，如果是，请指出是第几项.

6.2.3　等差数列的前 n 项和

一般地，设等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和是 S_n，即

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-2}+a_{n-1}+a_n, \qquad (1)$$

也可以写作

图文

高斯求和

$$S_n=a_n+a_{n-1}+a_{n-2}+\cdots+a_3+a_2+a_1. \qquad (2)$$

将式(1)和式(2)两边相加,得

$$2S_n=(a_1+a_n)+(a_2+a_{n-1})+(a_3+a_{n-2})+\cdots+(a_{n-2}+a_3)+(a_{n-1}+a_2)+(a_n+a_1).$$

又由于

$$a_1+a_n=a_n+a_1,$$
$$a_2+a_{n-1}=(a_1+d)+(a_n-d)=a_1+a_n,$$
$$a_3+a_{n-2}=(a_1+2d)+(a_n-2d)=a_1+a_n,$$
$$\cdots$$

因此,得

$$2S_n=n(a_1+a_n).$$

由此得到等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和公式为

$$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}, \qquad (6\text{-}3)$$

即等差数列前 n 项的和等于首末两项之和与项数乘积的一半.

又因为 $a_n=a_1+(n-1)d$,所以,前 n 项和 S_n 还可以表示为

$$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d. \qquad (6\text{-}4)$$

想一想

在实际应用时,应如何对式(6-3)和式(6-4)进行选择?

例 4 已知等差数列$\{a_n\}$中,$a_1=1$,$a_{20}=20$,求 S_{20}.

解 由已知条件可知,应选择公式(6-3).

因为 $a_1=1$,$a_{20}=20$,$n=20$,所以

$$S_{20}=\frac{n(a_1+a_{20})}{2}=\frac{20\times(1+20)}{2}=210.$$

例 5 等差数列

$$2,0,-2,-4,-6,\cdots$$

的前 n 项和等于-340,求 n 的值.

解 设数列的前 n 项和是-340,由于 $a_1=2$,$d=-6-(-4)=-2$,因此由式(6-4)可得

$$-340=2n+\frac{n(n-1)}{2}\times(-2),$$

即

$$n^2-3n-340=0.$$

解得

$$n_1=20,n_2=-17(\text{舍去}).$$

所以等差数列的前 20 项和等于-340.

做一做

1. 求等差数列 1，5，9，…的前 50 项和.

2. 在等差数列$\{a_n\}$中，$a_4=6$，$a_9=26$，求数列前 20 项和 S_{20}.

习题 6.2

1. 在数列$\{a_n\}$中，$a_1=\frac{1}{3}$，$a_{n+1}=a_n+3$，请写出数列的前 5 项，并判断这个数列是否为等差数列.

2. 写出等差数列

$$\frac{1}{5},\frac{3}{5},1,\frac{7}{5},\cdots$$

的通项公式，并求出数列的第 10 项.

3. 在等差数列$\{a_n\}$中，

(1)$d=-\frac{1}{3}$，$a_7=8$，求 a_1；

(2)$a_1=12$，$a_6=27$，求 d；

(3)$a_5=-1$，$a_8=2$，求 a_1 和 d.

4. 根据下列各题的条件，求相应等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和 S_n：

(1)$a_1=5$，$a_n=85$，$n=15$；

(2)$a_1=10$，$d=2$，$n=25$；

(3)$a_3=15$，$a_9=-9$，$n=10$.

5. 根据下列条件，求相应等差数列$\{a_n\}$的有关未知数：

(1)$d=-2$，$n=8$，$S_n=0$，求 a_1 和 a_n；

(2)$a_1=1$，$d=4$，$S_n=45$，求 n 和 a_n.

6.3 等比数列

6.3.1 等比数列的概念

图文
“72 法则”

我国古代著名学者庄子曰：“一尺之棰，日取其半，万世不竭.”用现代语言叙述为：一尺长的木棒，每日取其一半，永远取不完. 这样，每日剩下的部分都是前一日的一半. 如果把“一尺之棰”看作单位“1”，那么就可以得到一个数列

$$1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\cdots.$$

从上面的例子中看到，数列中的每一项与它的前一项的比都等于$\frac{1}{2}$.

一般地，如果一个数列

$$a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$$

从第 2 项起，每一项与它前一项的比都等于同一个非零的常数，那么这个数列叫作**等比数列**. 非零常数叫作等比数列的**公比**，一般用字母 q 来表示.

由定义可知，若数列$\{a_n\}$为等比数列，公比为 q，则 a_1 与 q 均不为零，且有$\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$，即

$$a_{n+1}=a_n\cdot q. \tag{6-5}$$

想一想

如果等比数列 a_1，a_2，…，a_n 的公比为 q，那么数列 a_n，a_{n-1}，…，a_2，a_1 是否为等比数列？如果是等比数列，则公比是多少？

例 1 在等比数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$，$q=3$，求 a_2，a_3，a_4，a_5.

解 $a_2=a_1\cdot q=2\times3=6$，

$a_3=a_2\cdot q=6\times3=18$，

$a_4=a_3\cdot q=18\times3=54$，

$a_5=a_4\cdot q=54\times3=162$.

做一做

1. 指出下列数列是否为等比数列，若是等比数列，请求出其公比：

(1) $-\frac{1}{2},1,-2,4,\cdots$；

(2) $\frac{1}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{9},\frac{1}{12},\cdots$.

2. 在等比数列$\{a_n\}$中，$a_3=-6$，$q=2$，求a_4，a_5和a_6.

6.3.2 等比数列的通项公式

设等比数列$\{a_n\}$的公比为q，则

$$a_2=a_1\cdot q,$$

$$a_3=a_2\cdot q=(a_1\cdot q)\cdot q=a_1\cdot q^2,$$

$$a_4=a_3\cdot q=(a_1\cdot q^2)\cdot q=a_1\cdot q^3,$$

……

由此可知，首项为a_1，公比为q的等比数列的通项公式为

$$a_n=a_1\cdot q^{n-1}. \tag{6-6}$$

例 2 已知等比数列$\{a_n\}$的首项是3，公比$q=2$，求数列的第5项.

解 根据等比数列的通项公式$a_n=a_1\cdot q^{n-1}$，得

$$a_5=a_1\cdot q^{5-1}=3\times2^4=48.$$

例 3 已知在等比数列$\{a_n\}$中，$a_1=-2$，$a_5=-32$，求公比q.

解 因为$a_1=-2$，$a_5=-32$，所以

$$(-2)\times q^{5-1}=-32,$$

即$q^4=16$，解得

$$q=\pm2.$$

一般地，如果在a与b之间插入一个数c，使得a，c，b成等比数列，那么c叫作a与b的**等比中项**.

想一想

在等比数列$\{a_n\}$中，a_3是不是a_1和a_5的等比中项？

如果 c 是 a 与 b 的等比中项，那么$\frac{c}{a}=\frac{b}{c}$，即 $c^2=ab$，所以

$$c=\pm\sqrt{ab}\ (ab>0).$$

由等比中项的定义可知，在一个等比数列中，从第 2 项起，每一项(有穷等比数列的最后一项除外)都是它前一项与后一项的等比中项.

做一做

1. 求等比数列$\frac{1}{3}$,1,3,…的通项公式和第 8 项.

2. 在等比数列$\{a_n\}$中，$a_2=-\frac{1}{25}$，$a_5=-5$，求等比数列的通项公式，并判断-125是否为数列中的项，如果是，指出是第几项.

3. 求下列各组数的等比中项：

(1)80，45；　　(2)$\sqrt{3}+\sqrt{2}$，$\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

6.3.3 等比数列的前 n 项和

下面研究如何求等比数列的前 n 项和.

一般地，设等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，即

$$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_n,$$

根据等比数列的通项公式 $a_n=a_1\cdot q^{n-1}$，上式可以写为

$$S_n=a_1+a_1q+\cdots+a_1q^{n-2}+a_1q^{n-1}, \tag{1}$$

将式(1)的两边同时乘公比 q，得

$$qS_n=a_1q+a_1q^2+\cdots+a_1q^{n-1}+a_1q^n, \tag{2}$$

由(1)－(2)得

$$(1-q)S_n=a_1-a_1q^n.$$

因此得到，当 $q\neq1$ 时，等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和公式为

$$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}\ (q\neq1). \tag{6-7}$$

又因为 $a_1q^n=(a_1q^{n-1})q=a_nq$，所以式(6-7)还可以写为

$$S_n=\frac{a_1-a_nq}{1-q}(q\neq1). \qquad (6\text{-}8)$$

当 $q=1$ 时，等比数列的各项都相等，此时数列的前 n 项和为 $S_n=na_1$.

> **注 意**
>
> 在求等比数列的前 n 项和时，一定要先判断公比 q 是否为 1.

例 4 求等比数列 $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\cdots$ 的前 n 项和公式，并求出数列的前 8 项和.

解 因为 $a_1=\frac{1}{2}$，$q=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\neq1$，所以根据式(6-7)得等比数列前 n 项和公式为

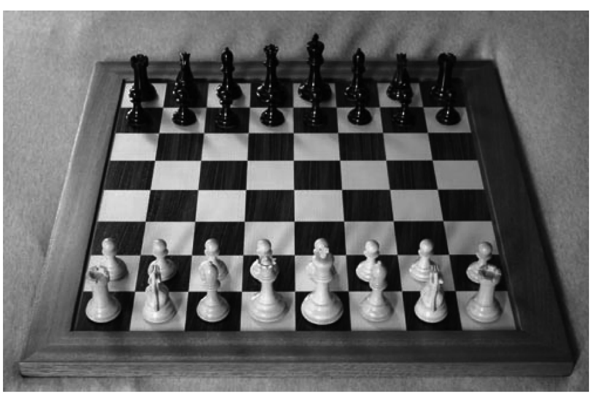
$$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{\frac{1}{2}\times\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

所以 $$S_8=1-\left(\frac{1}{2}\right)^8=\frac{255}{256}.$$

知识卡片

棋盘上的麦粒

古代印度的舍罕王打算重赏国际象棋的发明者——宰相西萨.



西萨向国王请求说："陛下，我想向您要一点儿粮食，然后将它们分给贫困的百姓."

国王高兴地同意了.

“请您派人在这张棋盘的第一个小格内放上一粒麦子，在第二格放两粒，在第三格放四粒……照这样下去，每格内的数量比前一格增加一倍。陛下啊，把这些摆满棋盘上所有 64 格的麦粒都赏赐给您的仆人吧！我只要这些就够了.”国王许诺了宰相这个看起来微不足道的请求.

按照西萨的请求，需要 18 446 744 073 709 551 615 颗麦粒布满棋盘. 这是一个长达 20 位的天文数字！这样多的麦粒相当于全世界两千年的小麦产量. 不过当时在场的所有人都不知道这个结果. 他们眼看着仅用一小碗麦粒就填满了棋盘上十几个方格，禁不住笑了起来，连国王也认为西萨太傻了.

随着放置麦粒的方格不断增多，搬运麦粒的工具也由碗换成盆，又由盆换成箩筐. 即使到这个时候，大臣们还是笑声不断，甚至有人提议不必如此费事了，干脆装满一马车麦子给西萨就行了！

不知从哪一刻起，喧闹的人们突然安静下来，大臣和国王都惊诧得张大了嘴：因为即使倾全国所有，也填不满下一个格子了.

做一做

1. 求等比数列 $\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \cdots$ 的前 n 项和公式，并求出数列的前 10 项和.

2. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q=2$，$S_4=1$，求 a_1 和 S_{10}.

习题 6.3

1. 填空题：

(1) 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=\frac{9}{8}$，$a_n=\frac{1}{3}$，$q=\frac{2}{3}$，则 $n=$________.

(2)已知等比数列 $a_n=2^{n-2}$，则 $a_1\cdot a_2=$________，$a_3\cdot a_4=$________.

2.等比数列$\{a_n\}$的首项是16，公比是$\frac{1}{4}$，写出它的通项公式，并求出第6项.

3.写出等比数列$\frac{8}{3}$，4，6，…的通项公式，并写出它的第4项到第8项.

4.求下列各组数的等比中项：

(1)-4，-7；

(2)$7+3\sqrt{5}$，$7-3\sqrt{5}$.

5.在9与25中间插入一个数，使它们成为等比数列，求这个数.

6.根据下列各题的条件，求相应等比数列$\{a_n\}$的前n项和S_n：

(1)$a_1=3$，$q=2$，$n=6$；(2)$a_1=1$，$q=2$，$a_n=1\ 024$.

7.等比数列$\{a_n\}$的首项是3，公比是-2，求其前6项和.

6.4　数列实际应用举例

在生活实践中，有很多实际问题都可以转化为数列问题，然后用数列的知识求解.

例1　银行有一种储蓄业务叫作零存整取，即每月定时存入一笔相同数目的现金，到约定日期可以一起取出全部本利和(本金与利息之和).若某人每月初存入100元，银行以年利率2.25%计息，试问年终结算时本利和是多少？

解　若年利率为2.25%，则折合月利率为0.187 5%.

年终结算时：

第 1 个月的存款利息为 $100\times0.1875\%\times12$，本利和为 $100+100\times0.1875\%\times12$；

第 2 个月的存款利息为 $100\times0.1875\%\times11$，本利和为 $100+100\times0.1875\%\times11$；

第 3 个月的存款利息为 $100\times0.1875\%\times10$，本利和为 $100+100\times0.1875\%\times10$；

……

第 12 个月的存款利息为 $100\times0.1875\%\times1$，本利和为 $100+100\times0.1875\%\times1$.

因此，每月存入 100 元的到期本利和构成一个等差数列，设为 $\{a_n\}$，则 $n=12$，

$$a_1=100+100\times0.1875\%\times12=102.25,$$

$$a_n=100+100\times0.1875\%\times1=100.1875,$$

所以
$$\begin{aligned}S_{12}&=\frac{n(a_1+a_{12})}{2}\\&=\frac{12\times(102.25+100.1875)}{2}\\&=1\,214.625.\end{aligned}$$

答：年终结算时本利和是 1 214.625 元.

例 2 某林场今年计划造林 10 万平方米，此后每年比上一年多造林 10%，那么从今年起，几年内可以使林场造林面积达到 60 万平方米？（结果保留整数）

解 因为今年计划造林 10 万平方米，第二年计划造林 $10+10\times10\%=10\times(1+10\%)$，第三年计划造林 $10\times(1+10\%)+10\times(1+10\%)\times10\%=10\times(1+10\%)^2$，…，由此可知，每年计划造林的面积数构成一个等比数列，设为 $\{a_n\}$，则 $a_1=10$，$q=1+10\%=1.1$，$S_n=60$，所以

$$\frac{10\times(1-1.1^n)}{1-1.1}=60,$$

解得 $n\approx5$.

答：5 年内可以使林场造林面积达到 60 万平方米.

做一做

1. 安装在一个公共轴上的5个皮带轮的直径成等差数列，其中最大的与最小的皮带轮的直径分别是216 mm与120 mm，求中间3个皮带轮的直径.

2. 某企业本年度手机配件生产的利润为100万元，计划采用新技术、新工艺，使利润保持平均每年增长20%，求该企业在手机配件生产这个项目上，从第2年开始，后5年的预期总利润.

习题 6.4

1. 银行给某工厂无息贷款36 000元，还款方式是一年后的第一个月还1 000元，以后每月比前一个月多还200元，请问需要多少个月才能全部还清贷款?

2. 某城市2016年的生产总值为100亿元，如果年增长率保持为8%，试问多少年后该城市的生产总值翻一番?（结果保留整数）

6.5 数学归纳法

数学归纳法是一种特殊的证明方法，主要用于研究与正整数有关的数学问题. 例如，对于数列$\{a_n\}$，已知$a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n$ $(n=1,2,3,\cdots)$，通过对前四项的归纳可以猜想出其通项公式为$a=2^{n-1}$. 但是，我们只能肯定这个猜想对于前四项是成立

的，而数列$\{a_n\}$的项数有无限多个，不可能对其逐一进行验证，那么怎样才能证明这个猜想呢？

对于多米诺骨牌游戏，大家都不陌生，这是一种码放骨牌的游戏. 码放骨牌时要注意每两块牌之间要有一个合适的距离，以保证后一块牌能因前一块牌倒下而倒下. 这样只要推倒第一块骨牌，就可导致第二块骨牌倒下；而第二块骨牌倒下，就可导致第三块骨牌倒下……最后，无论有多少块骨牌都能全部倒下.

可以看出，只要满足以下两个条件，所有多米诺骨牌都能全部倒下：

(1)第一块骨牌倒下；

(2)任意相邻的两块骨牌，前一块倒下一定导致后一块倒下.

其中，条件(2)给出一个递推关系：当第k块倒下时，相邻的第$k+1$块也倒下. 这样，无论有多少块骨牌，只要第一块骨牌倒下，通过条件(2)给出的递推关系，其他所有的骨牌就能够相继倒下.

同理，对于上面提到的数列$\{a_n\}$，当$n=1$时，$a_1=2^{1-1}=1$，猜想成立，这就相当于游戏的条件(1)；类比条件(2)，可以尝试证明数列$\{a_n\}$是否满足递推关系：

如果$n=k$时猜想成立，即$a_k=2^{k-1}$，那么$n=k+1$时猜想也成立，即$a_{k+1}=2^{(k+1)-1}$. 事实上，如果$a_k=2^{k-1}$，那么

$$a_{k+1}=2a_k=2\times2^{k-1}=2^{(k+1)-1},$$

即$n=k+1$时，猜想也成立.

这样，对于猜想，当$n=1$时成立，就有$n=2$时也成立；当$n=2$时成立，就有$n=3$时也成立；当$n=3$时成立，就有$n=4$时也成立……所以，对于任意的正整数n，猜想都成立，即数列的通项公式为$a_n=2^{n-1}$.

一般地，证明一个与正整数有关的命题，可按下列步骤进行：

(1)证明当n取第一个值n_0($n_0\in\mathbf{N}^*$)时，命题成立；

(2)假设$n=k$($n\geqslant n_0$，$k\in\mathbf{N}^*$)时命题成立，证明当$n=$

$k+1$ 时命题也成立.

根据以上两个步骤，就可以断定命题对从 n_0 开始的所有正整数 n 都成立，这种证明方法称为**数学归纳法**. 应用数学归纳法可以对许多数学猜想进行验证，如哥德巴赫猜想、费马猜想、四色猜想等.

应用数学归纳法证明与正整数有关的命题的步骤可用框图表示，如图 6-1 所示.

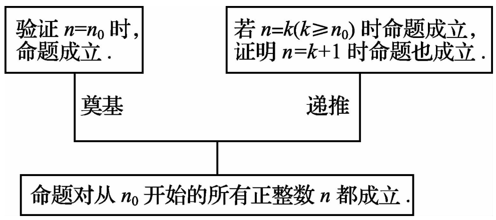


图 6-1

例 1 用数学归纳法证明：如果数列 $\{a_n\}$ 是一个等差数列，公差为 d，那么 $a_n=a_1+(n-1)d$ 对任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 都成立.

证明 (1)当 $n=1$ 时，左边 $=a_1$，右边 $=a_1+(1-1)d=a_1$，等式成立.

(2)假设 $n=k(k\geqslant 1,k\in\mathbf{N}^*)$ 时等式成立，即

$$a_k=a_1+(k-1)d,$$

那么，当 $n=k+1$ 时，由于

$$a_{k+1}=a_k+d,$$

则

$$a_{k+1}=a_k+d=a_1+(k-1)d+d=a_1+[(k+1)-1]d,$$

即当 $n=k+1$ 时，等式也成立.

综上所述，等差数列 $a_n=a_1+(n-1)d$ 对任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 都成立.

> **注 意**
>
> 步骤(1)是奠基步骤，是论证命题的基础；步骤(2)是归纳步骤，是推理的依据，是判断命题是否由特殊推广到一般的依据，它反映了无限递推关系.

例 2 用数学归纳法证明：$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

证明 (1)当 $n=1$ 时，左边 $=1^2=1$，右边 $=\dfrac{1\times2\times3}{6}=1$，等式成立.

(2)假设 $n=k(k\geqslant 1,k\in\mathbf{N}^*)$时,等式成立,即

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6},$$

那么,当 $n=k+1$ 时,则

$$\begin{aligned}&1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2\\=&\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2\\=&\frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6}\\=&\frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}\\=&\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}\\=&\frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6},\end{aligned}$$

即当 $n=k+1$ 时,等式也成立.

综上所述,等式对任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 都成立.

例 3 用数学归纳法证明:x^n-y^n 能被 $x-y$ 整除.

证明 (1)当 $n=1$ 时,$x-y$ 能被 $x-y$ 整除.

(2)假设 $n=k(k\geqslant 1,k\in\mathbf{N}^*)$时,$x^k-y^k(k\in\mathbf{N}^*)$能被 $x-y$整除,那么当 $n=k+1$ 时,则

$$\begin{aligned}x^{k+1}-y^{k+1}&=x\cdot x^k-y\cdot y^k\\&=x\cdot x^k-x\cdot y^k+x\cdot y^k-y\cdot y^k\\&=x(x^k-y^k)+y^k(x-y).\end{aligned}$$

因为 x^k-y^k 与 $x-y$ 都能被 $x-y$ 整除,所以当 $n=k+1$ 时,$x^{k+1}-y^{k+1}$也能被 $x-y$ 整除.

综上所述,命题对任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 都成立.

做一做

用数学归纳法证明:n^3+5n 能被 6 整除.

习题 6.5

1. 在数列$\{a_n\}$中，已知 $a_1=1$，而 $a_{n+1}=\frac{a_n}{1+a_n}(n=1,2,3,\cdots)$，

(1)计算这个数列的前 5 项；

(2)根据(1)的结果猜想这个数列的通项公式；

(3)用数学归纳法证明你的猜想.

2. 用数学归纳法证明：

(1)$1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$；

(2)$1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2=\frac{1}{3}n(4n^2-1)$；

(3)$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$.

3. 用数学归纳法证明：$3^{4n+2}+5^{2n+1}$能被 14 整除.

单元小结

一、知识脉络图

- 数列
  - 数列的概念
    - 数列的基本概念
    - 数列的通项公式
  - 等差数列
    - 等差数列的概念
    - 等差数列的通项公式
    - 等差数列的前n项和
  - 等比数列
    - 等比数列的概念
    - 等比数列的通项公式
    - 等比数列的前n项和
  - 数列实际应用举例
  - 数学归纳法

二、主要内容

本单元主要学习数列的概念、等差数列、等比数列及数列的实际应用.

1. 数列的概念

(1)数列的定义

数列中的数是有序的,数相同但排列顺序不同是不同的数列.

(2)数列的通项公式

数列的一般形式可以写作 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots(n\in\mathbf{N}^*)$,记作$\{a_n\}$,其中下脚标的数字代表项数.因此,通常把第 n 项 a_n 叫作数列$\{a_n\}$的通项或一般项.

如果数列$\{a_n\}$的第 n 项 a_n 能够用关于项数 n 的一个式子来表示,那么这个式子叫作这个数列的通项公式.

由数列的通项公式可求得该数列的任意一项.

2. 等差数列

(1)等差数列的定义

一般地,如果数列 $a_1,a_2,\cdots a_n,\cdots$从第二项起,每一项与它前一项的差都等于同一个常数,那么这个数列叫作等差数列,常数叫作等差数列的公差,一般用字母 d 表示.

(2)等差数列的通项公式

首项为 a_1,公差为 d 的等差数列的通项公式为 $a_n=a_1+(n-1)d$.对于公式中的四个量 a_1,d,a_n,n 来说,只要知道了其中三个量,就一定能求得另一个量.

(3)等差数列的前 n 项和 S_n

在计算等差数列的前 n 项和 S_n 时可按照以下公式进行:

$$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}\text{或 }S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d.$$

提示:在解等差数列的相关问题时,若遇到三个数成等差数列,并且知道它们的和,一般设这三个数为 $a-d,a,a+d$,其中 d 为公差.

3. 等比数列

(1)等比数列的定义

一般地,如果数列 $a_1,a_2,\cdots a_n,\cdots$从第二项起,每一项与它

前一项的比都等于同一个非零的常数，那么这个数列叫作等比数列，非零的常数叫作等比数列的公比，一般用字母 q 表示.

(2)等比数列的通项公式

首项为 a_1，公比为 q 的等比数列的通项公式为 $a_n=a_1\cdot q^{n-1}$. 对于公式中的四个量 a_1，q，a_n，n 来说，只要知道了其中三个量，就一定能求得另一个量.

(3)等比数列的前 n 项和 S_n

在计算等比数列的前 n 项和 S_n 时可按照以下公式进行：

$$S_n=\frac{a_1-a_nq}{1-q}(q\neq 1)\text{或 } S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}(q\neq 1),$$

$$S_n=na_1(q=1).$$

提示：在解等比数列的相关问题时，若遇到三个数成等比数列，并且知道它们的和，一般设这三个数为 $\frac{a}{q}$，a，aq，其中 q 为公比.

4. 了解数列在实际生活中的应用，会用等差数列和等比数列的概念及公式解决简单的生活及生产中有关的问题，培养数据处理技能和分析解决问题的能力.

5. 数学归纳法

数学归纳法是证明与正整数有关的命题的常用方法. 一般可按照以下步骤进行：

(1)证明当 n 取第一个值 n_0($n_0\in\mathbf{N}^*$)时命题成立；

(2)假设 $n=k$($n\geqslant n_0$，$k\in\mathbf{N}^*$)时命题成立，证明当 $n=k+1$时命题也成立.

在上述两步都做完后，就可以断定这个命题对从 n_0 开始的所有正整数 n 都成立.

复习题

A 组

1. 选择题：

(1)等差数列的通项公式为 $a_n=3n-2$，则前 20 项的和 $S_{20}=$(　　).

A. 390　　B. 590

C. 780　　D. 295

(2)等差数列$-\frac{7}{2}$,-3,$-\frac{5}{2}$,-2,…的第 $n+1$ 项为(　　).

A. $\frac{n-7}{2}$　　B. $\frac{n-4}{2}$

C. $\frac{n}{2}-4$　　D. $\frac{n}{2}-7$

(3)在等比数列$\{a_n\}$中,$a_2=2$,$a_5=6$,则 $a_8=$(　　).

A. 10　　B. 12

C. 18　　D. 24

(4)已知$\sqrt{3}$,$a-1$,$3\sqrt{3}$成等比数列,则 $a=$(　　).

A. 3　　B. 3 或-3

C. 4 或-2　　D. -3

2. 填空题:

(1)数列 0,3,8,15,…的一个通项公式是________.

(2)一个数列的通项公式是 $a_n=n(n-1)$,则 $a_{11}=$________,$a_{20}=$________,56 是这个数列的第________项.

(3)数列$\{a_n\}$是等比数列,$a_1=1$,$q=3$,则 $a_6=$________.

3. 在等差数列$\{a_n\}$中,$a_1=3$,$a_6=33$,求 S_{20}.

4. 在等比数列$\{a_n\}$中,$a_5=\frac{3}{4}$,$q=-\frac{1}{2}$,求 S_7.

5. 某工厂去年的产值为 138 万元,计划在今后 5 年内每年的产值比上一年产值增长 10%,则这 5 年的总产值是多少?(精确到万元)

6. 证明下列等式对一切正整数 n 都成立.

(1)$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$;

(2)$2\cdot 2+3\cdot 2^2+4\cdot 2^3+\cdots+(n+1)\cdot 2^n=n\cdot 2^{n+1}$.

B 组

1. 在等差数列中,已知 $d=2$,且 $a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{100}=80$,求数列的前 100 项和.

2. 已知等比数列$\{a_n\}$的前 3 项和为$-\frac{3}{5}$,前 6 项和为$\frac{21}{5}$,

求数列$\{a_n\}$的前 10 项和.

3. 证明凸边形对角线的条数 $g(n)$ 为 $g(n)=\frac{1}{2}n(n-3)$ $(n\geqslant 3)$.

知识拓展

斐波那契数列

斐波那契数列的定义

“斐波那契数列”的发明者是意大利数学家列昂纳多·斐波那契(Leonardo Fibonacci，1175—1250). 斐波那契数列指的是这样一个数列：

$$1,1,2,3,5,8,13,21,\cdots.$$

这个数列从第三项开始，每一项都等于前两项之和. 它的通项公式为：$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$，又称为“比内公式”，是用无理数表示有理数的一个范例. 这样一个完全是自然数的数列，其通项公式居然是用无理数来表达的.

斐波那契数列奇妙属性

随着数列项数的增加，前一项与后一项之比越来越逼近黄金分割的数值 0.618 033 988 7….

从第二项开始，每个奇数项的平方都比前后两项之积多 1，每个偶数项的平方都比前后两项之积少 1.

斐波那契数列 $f(n)$：$f(0)=0$，$f(1)=1$，$f(2)=1$，$f(3)=2$，…的其他性质：

(1) $f(0)+f(1)+f(2)+\cdots+f(n)=f(n+2)-1$；

(2) $f(1)+f(3)+f(5)+\cdots+f(2n-1)=f(2n)$；

(3) $f(2)+f(4)+f(6)+\cdots+f(2n)=f(2n+1)-1$；

(4) $[f(0)]^2+[f(1)]^2+\cdots+[f(n)]^2=f(n)\cdot f(n+1)$；

(5) $f(0)-f(1)+f(2)-\cdots+(-1)^n f(n)$
$=(-1)^n[f(n+1)-f(n)]+1$；

(6) $f(m+n-1)=f(m-1)f(n-1)+f(m)f(n)$；

(7) $[f(n)]^2=(-1)^{n-1}+f(n-1)f(n+1)$；

(8)$f(2n-1)=[f(n)]^2-[f(n-2)]^2$；

(9)$3f(n)=f(n+2)+f(n-2)$；

(10)$f(2n-2m-2)[f(2n)+f(2n+2)]$

$=f(2m+2)+f(4n-2m)(n>m\geqslant -1$，且 $n\geqslant 1)$.

在杨辉三角中隐藏着斐波那契数列：

1

1　1

1　2　1

1　3　3　1

1　4　6　4　1

……

过第一行的"1"向左下方作45度斜线，之后作直线的平行线，将每条直线所过的数加起来，即得一个数列1，1，2，3，5，8，….

斐波那契数列的别名

斐波那契数列因数学家列昂纳多·斐波那契以兔子繁殖为例子而引入，故又称为"兔子数列".

一般而言，兔子在出生两个月后，就有了繁殖能力，一对兔子每个月能生出一对小兔子.如果所有兔子都不死，那么一年以后可以繁殖多少对兔子？

我们不妨拿新出生的一对小兔子分析一下：

第一个月小兔子没有繁殖能力，所以还是一对；

两个月后生下一对小兔，总数共有两对；

三个月以后，老兔子又生下一对，因为小兔子还没有繁殖能力，所以一共是三对；

……

依次类推可以列出下表：

经过月数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
兔子对数	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377

表中数字1，1，2，3，5，8，…构成了一个斐波那契数列.

斐波那契数学游戏

一位魔术师拿着一块边长为8英尺(1英尺=30.48厘

米)的正方形地毯,对他的地毯匠朋友说:“请您把这块地毯分成四小块,再把它们缝成一块长 13 英尺、宽 5 英尺的长方形地毯.”这位地毯匠对魔术师的算术深感惊异,因为两者之间面积相差达 1 平方英尺呢!可是魔术师竟让地毯匠用图 1 和图 2 的办法达到了他的目的.

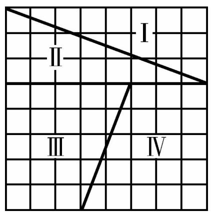


图 1

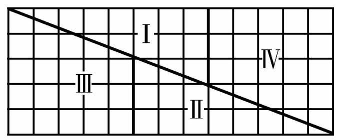


图 2

这真是不可思议的事!亲爱的读者,你猜得到那神奇的 1 平方英尺究竟跑到哪儿去了吗?实际上后来缝成的地毯有条细缝,面积刚好就是 1 平方英尺.

第 7 单元　平面向量

引　例

甲、乙两车分别以 $v_1=40$ km/h，$v_2=50$ km/h 的速度从同一地点出发向北行驶. 2 小时后，它们相距 20 km，如图 7-1(a) 所示.

甲、乙两车分别以 $v_1=40$ km/h，$v_2=50$ km/h 的速度从同一地点出发，甲车向北，乙车向南. 2 小时后，它们相距 180 km，如图 7-1(b) 所示.

它们的行驶速度一样，为什么 2 小时后的距离相差这么大？

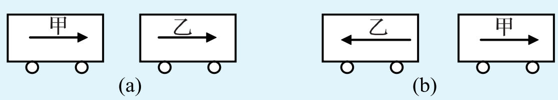


图 7-1

7.1　平面向量的概念

当人用力推一个箱子的时候，我们根据初中所学的物理知识可知，箱子在水平方向上受到推力及地面给箱子的摩擦

力，这两个力不但有数值的大小，而且有方向.

在现实生活中存在两种类型的量：一种量只有数值的大小而没有方向，它们可以用实数表示，如质量、时间、体积、温度等；而另一种量不仅有数值的大小，而且有方向，如力、速度、位移等. 引例中的甲、乙两车虽然行驶速度一样，但因为它们的行驶方向不同，所以经过一段时间后，两种情况下的距离差距变大.

为了区分这两种量，我们把只有数值大小的量叫作**数量**（或**标量**），把既有大小又有方向的量叫作**向量**（或**矢量**）.

平面上带有指向的线段（有向线段）叫作**平面向量**，线段的指向就是平面向量的方向，线段的长度表示平面向量的大小. 有向线段的起点叫作平面向量的**起点**，有向线段的终点叫作平面向量的**终点**. 如图 7-2 所示，以点 A 为起点，点 B 为终点的向量记作$\overrightarrow{AB}$，也可以使用小写黑体英文字母表示，记作 $\boldsymbol{a}$，手写时为了区分应在字母上加箭头，如$\vec{a}$.

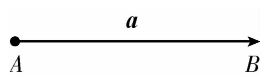


图 7-2

向量的长度叫作**向量的模**，向量 $\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AB}$的模依次记作 $|\boldsymbol{a}|$，$|\overrightarrow{AB}|$. 向量的模是一个非负数.

当向量的终点和起点重合时，向量便成为一个点，我们称它为**零向量**，记作 $\mathbf{0}$. 零向量的模等于 0，即 $|\mathbf{0}|=0$. 零向量的方向是任意的. **规定**：所有的零向量都相等.

模为 1 的向量叫作**单位向量**.

如图 7-3(a)所示，如果两个向量的模相等，方向也相同，那么我们就说这两个**向量相等**. 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相等，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

如图 7-3(b)所示，如果两个向量的模相等，方向相反，那么我们就说这两个向量互为**相反向量**，$\boldsymbol{a}$ 的相反向量记作

想一想

在生活中还有哪些量是数量，哪些量是向量呢？

注 意

本单元只在平面中研究向量，因此，所研究的向量都是平面向量.

$-\boldsymbol{a}$. **规定**：零向量的相反向量仍为零向量.

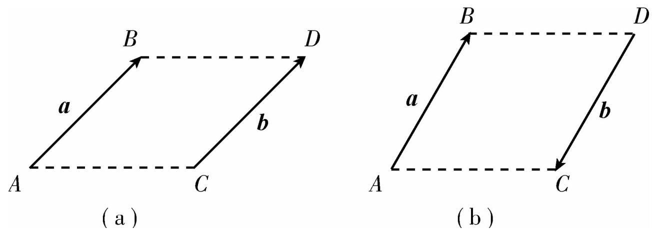


图 7-3

方向相同或相反的两个非零向量叫作**互相平行的向量**，向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$. **规定**：零向量与任何一个向量都平行.

由于任意一组互相平行的向量都可以平移到同一条直线上，因此，互相平行的向量又叫作**共线向量**.

例 1 如图 7-4 所示，在平行四边形 $ABCD$ 中，O 为对角线的交点.

(1)找出与向量$\overrightarrow{AD}$相等的向量；

(2)找出向量$\overrightarrow{CD}$的负向量；

(3)找出与向量$\overrightarrow{AB}$平行的向量.

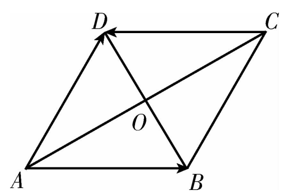


图 7-4

解 根据平行四边形的性质，得

(1)$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$.

(2)$-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}$，$-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{DC}$.

(3)$\overrightarrow{BA}/\!/\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{DC}/\!/\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{CD}/\!/\overrightarrow{AB}$.

做一做

如图 7-5 所示，点 O 是正六边形 $ABCDEF$ 的中心，试写出：

(1)与$\overrightarrow{OC}$相等的向量；

(2)$\overrightarrow{OC}$的负向量；

(3)与$\overrightarrow{OC}$共线的向量.

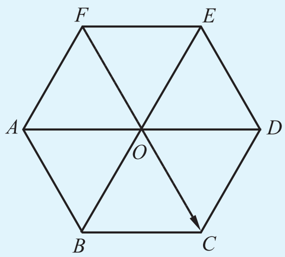


图 7-5

习题 7.1

1. 如图 7-6 所示，点 D,E,F 分别是$\triangle ABC$ 三边的中点，试写出：

(1)与向量$\overrightarrow{EF}$相等的向量；

(2)与向量$\overrightarrow{AD}$共线的向量.

2. 如图 7-7 所示，已知四边形 $ABCD$ 为等腰梯形，$AB/\!/CD$，$AD=BC$.

(1)写出与向量$\overrightarrow{AB}$共线的向量；

(2)确定向量$\overrightarrow{AD}$与向量$\overrightarrow{BC}$的关系.

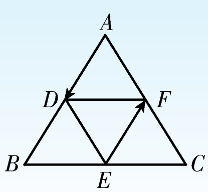


图 7-6

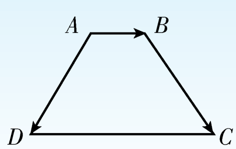


图 7-7

7.2 平面向量的运算

7.2.1 平面向量的加法

在上一节中，我们学习了向量的概念. 现在我们考虑向量之间是否能像数与式那样进行运算呢？如果向量可以进行某些运算，那么这些运算又遵循什么运算法则呢？在这节，我们将学习这方面的知识.

一个动点由点 A 位移到点 B，又由点 B 位移到点 C，那么从点 A 到点 C 位移的结果与两次连续位移的结果相同，如图 7-8 所示. 这时，位移$\overrightarrow{AC}$叫作位移$\overrightarrow{AB}$与位移$\overrightarrow{BC}$的**和**，记作$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$.

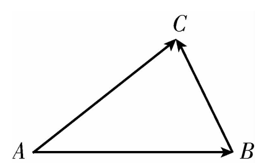


图 7-8

从位移求和，我们可以引出下述向量的加法法则：

一般地，设向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 不共线，在平面上任取一点 A，首尾相接地作$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，如图 7-9 所示，则向量$\overrightarrow{AC}$叫作向量$\overrightarrow{AB}$与向量$\overrightarrow{BC}$的**和**，记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，即

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}. \tag{7-1}$$

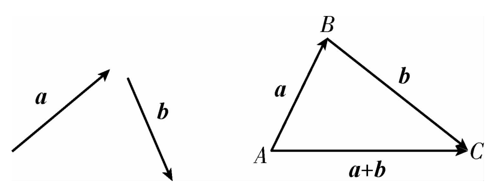


图 7-9

动画

平面向量的加法

求向量的和的运算叫作**向量的加法**. 上述求向量和的方法叫作**向量加法的三角形法则**.

当向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 共线时，首尾相接地作$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，同样可以得到 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AC}$. 如图 7-10(a)所示，表示向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 方向相同时的情形；如图 7-10(b)所示，表示向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 方向相反时的情形.

想一想

向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与向量 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$ 相等吗？自己动手画图来说明一下.

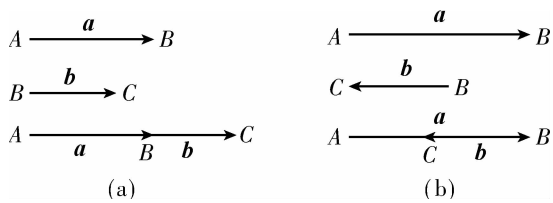


图 7-10

在图 7-9 中，如果仍以 A 为起点，作向量$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，如图 7-11 所示，则由$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$可知，四边形 $ABCD$ 为平行四边形. 再根据三角形法则得

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}.$$

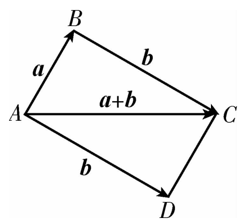


图 7-11

这说明，在平行四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AC}$表示的向量为$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{AD}$的和，这种求和的方法叫作**向量加法的平行四边形法则**.

向量加法具有以下性质：

(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$；

(2) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

(3) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

例 1 求下列各题中的和向量.

(1) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DO}$；(2) $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}$；(3) $\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}$.

解 (1) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{AO}$.

(2) $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

(3) $\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BC}$

$=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BC}$

$=\overrightarrow{CC}$

$=\boldsymbol{0}$.

做一做

1. 填空题：

(1)$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=$____；

(2)$\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DF}=$____；

(3)$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=$____.

2. 计算下列各式：

(1)$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}$；

(2)$\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}$；

(3)$(-\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{AB}$；

(4)$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$.

7.2.2 平面向量的减法

与数的运算类似，可以将向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的负向量的和定义为向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的**差**，即

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}).$$

根据向量加法的三角形法则，向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的差也可以这样去求：在平面上任选一点 A，作向量$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，则向量$\overrightarrow{CB}$就是所求的差 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，如图 7-12 所示.

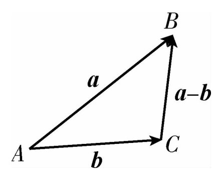


图 7-12

想一想

当向量 $\boldsymbol{a}$ 和向量 $\boldsymbol{b}$ 共线时，如何画图作出 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$?

由图 7-12 可知，起点相同的两个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，它们的差 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 仍然是一个向量，叫作向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**差向量**，其起点是减向量 $\boldsymbol{b}$ 的终点，终点是被减向量的终点，即

$$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}. \tag{7-2}$$

做一做

1. 计算下列各式：

(1)$\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{ON}$；

(2)$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AB}$；

(3)$\mathbf{0}-\overrightarrow{AB}$.

2. 在菱形 $ABCD$ 中，对角线的交点为 O，如果$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，试用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 表示$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{DA}$.

7.2.3 平面向量的数乘运算

实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的一个积是一个向量，叫作**数乘向量**，记作 $\lambda\boldsymbol{a}$，它的模为

$$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda|\cdot|\boldsymbol{a}|. \tag{7-3}$$

一般地，有

(1)$0\cdot\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$，$\lambda\cdot\mathbf{0}=\mathbf{0}$；

(2)当 $|\lambda\boldsymbol{a}|\neq 0$ 时，若 $\lambda>0$，则 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同；若 $\lambda<0$，则 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反.

实数与向量的乘法运算叫作**向量的数乘运算**.

和实数之间相乘一样，对于任意的向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 及实数 λ，μ，向量的数乘运算满足下列运算律：

(1)$(\lambda\mu)\boldsymbol{a}=\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})$；

(2)$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$；

(3)$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

向量的加法、减法及数乘向量运算都叫作**向量的线性运算**.

在 7.1 节中，我们知道了向量平行的概念，因此结合向量平行与数乘向量的含义，可以得到以下的结论：

设 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为两个非零向量，如果存在非零实数 λ，使得 $\boldsymbol{b}=$

$\lambda\boldsymbol{a}$，那么 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$；相反，如果 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，那么一定存在一个非零实数 λ，使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

一般地，$\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$（$\lambda,\mu$ 均为实数）叫作 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的一个**线性组合**. 如果 $\boldsymbol{l}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$，则称 $\boldsymbol{l}$ 可以用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ **线性表示**.

例 2 计算 $3\boldsymbol{a}+4(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})-3(2\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b})$.

解 根据向量的运算律，可得

$$\begin{aligned}\text{原式}&=3\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{a}+12\boldsymbol{b}-6\boldsymbol{a}+12\boldsymbol{b}\\&=(3+4-6)\boldsymbol{a}+(12+12)\boldsymbol{b}\\&=\boldsymbol{a}+24\boldsymbol{b}.\end{aligned}$$

例 3 已知平行四边形 $ABCD$ 的对角线相交于点 O，如图 7-13 所示. 若 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 表示 $\overrightarrow{AO}$，$\overrightarrow{OD}$.

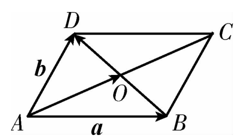


图 7-13

解 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$. 因为在平行四边形 $ABCD$ 中，O 分别为 AC，BD 的中点，所以

$$\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b},$$

$$\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}.$$

做一做

1. 计算下列各式：

(1) $2(4\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{a})-3(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$；

(2) $3\boldsymbol{a}+2(5\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b})-3(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$.

2. 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线，请作出有向线段 $\overrightarrow{OA}$，使 $\overrightarrow{OA}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$.

习题 7.2

1. 如图 7-14 所示,已知向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,求出下列向量:

(1)$2\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$;

(2)$3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$;

(3)$-2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

图 7-14

2. 求下列各和向量:

(1)$\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE})$;

(2)$(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AO})+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$.

3. 求下列各差向量:

(1)$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$;

(2)$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{DC}$.

4. 化简下列各式:

(1)$3(4\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})+4(\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a})$;

(2)$6(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})-5(-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$.

5. 如果 $m(3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})+n(4\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=2\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}$,求 m,n 的值.

6. 在三角形 ABC 中,$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{AE}$为中线,用 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 表示$\overrightarrow{BC}$、$\overrightarrow{AE}$.

7.3 平面向量的坐标表示

7.3.1 平面向量的坐标

我们知道,在平面直角坐标系中,平面内的每个点都可以用一对有序实数来表示,这对实数就是这个点的坐标. 同

样，在平面直角坐标系中，每个平面向量也可以用一对实数来表示.

设在平面直角坐标系中，x 轴的单位向量为 $\boldsymbol{i}$，y 轴的单位向量为 $\boldsymbol{j}$，则 x 轴上的向量表示为 $x\boldsymbol{i}$，y 轴上的向量表示为 $y\boldsymbol{j}$，其中 x,y 分别是它们在数轴上的坐标.

如图 7-15(a)所示，$\overrightarrow{OA}$为从坐标原点出发的向量，点 A 的坐标为(x,y)，则

$$\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i},\overrightarrow{ON}=y\boldsymbol{j}.$$

由平行四边形法则得

$$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}.$$

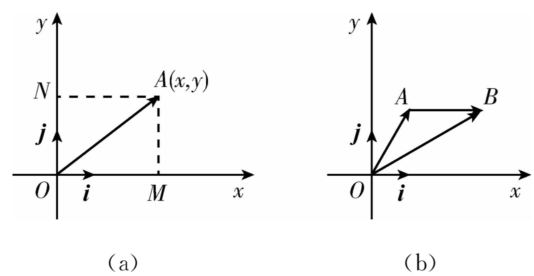


图 7-15

如图 7-15(b)所示，设点 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，则

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}&=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\\&=(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j})-(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j})\\&=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}.\end{aligned}$$

由此可知，对任意一个平面向量 $\boldsymbol{a}$，都存在一对有序实数(x,y)，使得

$$\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}.$$

有序实数对(x,y)叫作向量 $\boldsymbol{a}$ 的**坐标**，记作 $\boldsymbol{a}=(x,y)$.

例如，在图 7-15(a)中，起点为原点，终点为 $A(x,y)$的向量的坐标为$\overrightarrow{OA}=(x,y)$；在图 7-15(b)中，起点为 $A(x_1,y_1)$，终点为 $B(x_2,y_2)$的向量的坐标为$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$.

例 1 已知点 A,B 的坐标分别为 $A(5,3),B(3,-1)$，求$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BA}$的坐标.

解 $\overrightarrow{AB}=(3,-1)-(5,3)=(-2,-4)$，

$\overrightarrow{BA}=(5,3)-(3,-1)=(2,4)$.

做一做

1. 写出下列向量的坐标：

(1)$\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}$；

(2)$\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}$；

(3)$\boldsymbol{a}=-2\boldsymbol{j}$.

2. 已知 A,B 两点的坐标，求$\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{BA}$的坐标：

(1)$A(2,1)$,$B(1,2)$；

(2)$A(0,3)$,$B(-4,0)$.

7.3.2 平面向量线性运算的坐标表示

在图 7-16 中，我们观察可知，向量$\overrightarrow{OA}=(5,3)$,$\overrightarrow{OP}=(3,0)$,$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OP}=(8,3)$，两个向量和的坐标等于这两个向量坐标的和.

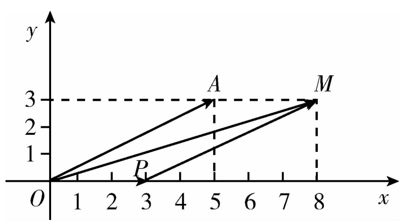


图 7-16

一般地，在平面直角坐标系中，$\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$,$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$，则

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(x_1+x_2,y_1+y_2)； \tag{7-4}$$

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(x_1-x_2,y_1-y_2)； \tag{7-5}$$

$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda x_1,\lambda y_1). \tag{7-6}$$

例 2 设 $\boldsymbol{a}=(-2,3)$,$\boldsymbol{b}=(1,1)$，求下列向量的坐标：

(1)$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$；

(2)$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$；

(3)$-4\boldsymbol{a}$.

解 (1)$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(-2,3)+(1,1)$

$=(-1,4)$.

$$
\begin{aligned}
(2)\ \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b} &= (-2,3)-(1,1) \\
&= (-3,2).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(3)\ -4\boldsymbol{a} &= -4\times(-2,3) \\
&= (8,-12).
\end{aligned}
$$

做一做

已知下列向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 的坐标，求 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, 2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}, 3\boldsymbol{a}$.

(1) $\boldsymbol{a}=(1,0), \boldsymbol{b}=(-4,-3)$；

(2) $\boldsymbol{a}=(-1,2), \boldsymbol{b}=(3,2)$.

7.3.3 共线向量的坐标表示

在 7.2 节中，我们知道对于两个非零向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$，当 $\lambda\neq 0$ 时，有 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$. 那么如何用向量的坐标来判断两个向量是否共线呢？

设 $\boldsymbol{a}=(x_1, y_1), \boldsymbol{b}=(x_2, y_2)$，如果 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$，则有

$$x_1=\lambda x_2, y_1=\lambda y_2,$$

所以 $x_1\cdot\lambda y_2=\lambda x_2\cdot y_1$，即

$$x_1 y_2=x_2 y_1.$$

因此，我们得到对于非零向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$，设 $\boldsymbol{a}=(x_1, y_1), \boldsymbol{b}=(x_2, y_2)$，当 $\lambda\neq 0$ 时，有

$$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b} \Leftrightarrow x_1 y_2-x_2 y_1=0. \tag{7-7}$$

同理，我们也可以通过向量的坐标来确定两个向量相等，即有下面的结论：

(1) 如果两个向量的横坐标、纵坐标分别相等，那么这两个向量相等；

(2) 如果两个向量相等，那么它们的横坐标、纵坐标都分别相等.

做一做

判断下列各组向量是否共线：

(1)$\boldsymbol{a}=(1,3)$，$\boldsymbol{b}=(2,6)$；

(2)$\boldsymbol{a}=(1,-1)$，$\boldsymbol{b}=(-2,2)$；

(3)$\boldsymbol{a}=(2,1)$，$\boldsymbol{b}=(-1,2)$；

(4)$\boldsymbol{a}=(5,3)$，$\boldsymbol{b}=\left(1,\frac{3}{5}\right)$.

习题 7.3

1. 如果 $\boldsymbol{a}=(3,1)$，$\boldsymbol{b}=(-2,5)$，那么 $3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=$(　　).

A. (2,7)　　B. (13,−7)

C. (2,−7)　　D. (13,13)

2. 如果 $M(-2,3)$，$N(-1,5)$，那么向量 $\overrightarrow{MN}$ 的坐标是(　　).

A. (1,2)　　B. (−1,−2)

C. (0,3)　　D. (1,6)

3. 计算：

(1)已知 $\boldsymbol{a}=(5,6)$，$\boldsymbol{b}=(-3,-2)$，求 $2\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b}$；

(2)已知 $\boldsymbol{a}=(-2,5)$，$\boldsymbol{b}=(-3,2)$，$\boldsymbol{c}=(4,0)$，求 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$.

4. 已知点 A，B 的坐标分别为$(-2,3)$，$(3,5)$，求 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BA}$ 的坐标.

5. 判断下列各组向量是否共线：

(1)$\boldsymbol{a}=(-1,2)$，$\boldsymbol{b}=(-2,4)$；

(2)$\boldsymbol{a}=(3,-4)$，$\boldsymbol{b}=(-4,3)$；

(3)$\boldsymbol{a}=\left(3,\frac{1}{2}\right)$，$\boldsymbol{b}=\left(-\frac{3}{2},-\frac{1}{4}\right)$.

6. 设 $\boldsymbol{a}=(2,1)$，$\boldsymbol{b}=(m,3)$，且 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，求 m 的值.

7.4　平面向量的内积

7.4.1　平面向量内积的概念

在世界大力士比赛中有一项拉卡车的比赛，某个人用 1 500 N的拉力 $\boldsymbol{F}$，沿着与水平方向成 30°角的方向拉卡车，使得卡车前进了 2 m，求这个人做了多少功？如图 7-17 所示，根据物理学知识，我们知道拉力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功 W 为

$$W=|\boldsymbol{F}|\cdot\cos 30°\cdot|\boldsymbol{s}|=1\ 500\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2=1\ 500\sqrt{3}(\mathrm{J}).$$

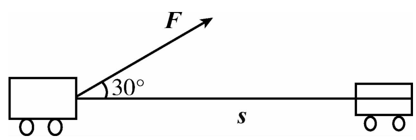


图 7-17

上述的功 W 是一个数量，它由向量 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{s}$ 的模及其夹角余弦的乘积来确定.

> **注　意**
>
> 两个向量的内积是一个实数，可能是正数，可能是负数，也可能是零.

如果 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为两个非零向量，作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，则把射线 OA 与 OB 所形成的角叫作向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的**夹角**，记作$<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>$. 显然 $0°\leqslant<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>\leqslant 180°$，且$<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>=<\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}>$.

两个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的模与它们夹角余弦的积叫作向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**内积**，记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>. \tag{7-8}$$

由内积的概念可以得到以下几个重要的结果：

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{0}=0$，$\boldsymbol{0}\cdot\boldsymbol{a}=0$；

(2) $\cos<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}$；

(3) 当$<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>=0°$时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|$，当$<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>=$

180°时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|$；

(4)当 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}$ 时，$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}\rangle=0°$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{a}|^2$，即 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$；

(5)当 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=90°$ 时，$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos 90°=0$，因此对于非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 有 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

注 意

向量的内积运算不满足结合律，即 $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}\neq\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$.

我们可以知道内积满足下面的运算律：

(1)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$；

(2)$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})$；

(3)$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$.

例 1 已知 $|\boldsymbol{a}|=4$，$|\boldsymbol{b}|=5$，$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=60°$，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.

解 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=4\times5\times\cos 60°=10$.

例 2 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-\sqrt{2}$，求 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$.

解 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\dfrac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

又因为 $0°\leqslant\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\leqslant180°$，所以 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=135°$.

例 3 已知 $|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=3$，$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=45°$，求 $(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})$.

解
$$\begin{aligned}(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})&=2\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})+\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\\&=2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}\\&=2|\boldsymbol{a}|^2-3\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-2|\boldsymbol{b}|^2\\&=2\times2^2-3\times2\times3\cos 45°-2\times3^2\\&=8-18\times\frac{\sqrt{2}}{2}-18\\&=-10-9\sqrt{2}.\end{aligned}$$

做一做

1. 已知 $|\boldsymbol{a}|=8$，$|\boldsymbol{b}|=3$，$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=60°$，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.
2. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=16$，求 $|\boldsymbol{a}|$.
3. 已知 $|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{b}|=2$，$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=30°$，求 $(3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}$.

7.4.2 平面向量内积的坐标表示

在平面直角坐标系中，向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标为 (x_1,y_1)，向量 $\boldsymbol{b}$

的坐标为(x_2,y_2)，$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$分别为x轴、y轴上的单位向量，则

$$\boldsymbol{a}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j},\boldsymbol{b}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}.$$

因为$\boldsymbol{i}\perp\boldsymbol{j}$，所以$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=0$，又因为$|\boldsymbol{i}|=|\boldsymbol{j}|=1$，所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j})\cdot(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j})\\&=x_1x_2\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}+x_1y_2\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}+x_2y_1\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}+y_1y_2\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}\\&=x_1x_2|\boldsymbol{i}|^2+y_1y_2|\boldsymbol{j}|^2\\&=x_1x_2+y_1y_2.\end{aligned}$$

这就是说，两个向量的内积等于它们对应坐标乘积的和，即两个非零向量$\boldsymbol{a}(x_1,y_1)$，$\boldsymbol{b}(x_2,y_2)$的内积为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2. \tag{7-9}$$

利用式(7-9)可以计算向量的模. 设$\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$，则

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}=\sqrt{x_1^2+y_1^2}. \tag{7-10}$$

应用上面的知识，我们还可以求出两个向量的夹角. 设两个非零向量为$\boldsymbol{a}(x_1,y_1)$、$\boldsymbol{b}(x_2,y_2)$，则

$$\begin{aligned}\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle&=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}\\&=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{{x_1}^2+{y_1}^2}\cdot\sqrt{{x_2}^2+{y_2}^2}}.\end{aligned} \tag{7-11}$$

我们知道$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，由式(7-9)可知

$$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0. \tag{7-12}$$

因此，利用上面的式子我们可以判断向量的垂直问题.

例 4 求下列向量的内积：

(1)$\boldsymbol{a}=(2,-3)$，$\boldsymbol{b}=(1,2)$；

(2)$\boldsymbol{a}=(4,2)$，$\boldsymbol{b}=(-3,-2)$.

解 (1)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2\times1+(-3)\times2=-4$.

(2)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=4\times(-3)+2\times(-2)=-16$.

例 5 已知$\boldsymbol{a}=(-1,2)$，$\boldsymbol{b}=(-3,1)$，求$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，$|\boldsymbol{a}|$，$|\boldsymbol{b}|$，$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$.

解 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(-1)\times(-3)+2\times1=5$，

$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}=\sqrt{(-1)^2+2^2}=\sqrt{5}$，

$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}}=\sqrt{(-3)^2+1^2}=\sqrt{10}$，

因为$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\dfrac{5}{\sqrt{5}\times\sqrt{10}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

所以$\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=45°$.

例 6 判断下列各组向量是否垂直：

(1)$\boldsymbol{a}=(2,-3)$,$\boldsymbol{b}=(-6,-4)$;

(2)$\boldsymbol{a}=(0,-1)$,$\boldsymbol{b}=(-1,2)$.

解 (1)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2\times(-6)+(-3)\times(-4)=0$,所以$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

(2)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\times(-1)+(-1)\times2=-2\neq0$,所以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不垂直.

做一做

1. 已知 $\boldsymbol{a}=(1,\sqrt{3})$,$\boldsymbol{b}=(0,\sqrt{3})$,求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$, $|\boldsymbol{a}|$, $|\boldsymbol{b}|$, $\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$.

2. 已知 $\boldsymbol{a}=(2,-5)$,$\boldsymbol{b}=(-3,4)$,$\boldsymbol{c}=(1,3)$,求 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

3. 判断下列各组向量是否垂直：

(1)$\boldsymbol{a}=(-2,4)$,$\boldsymbol{b}=(8,4)$;

(2)$\boldsymbol{a}=(-2,-3)$,$\boldsymbol{b}=(3,-2)$;

(3)$\boldsymbol{a}=(0,-1)$,$\boldsymbol{b}=(9,-2)$;

(4)$\boldsymbol{a}=(-2,1)$,$\boldsymbol{b}=(3,4)$.

习题 7.4

1. 已知 $|\boldsymbol{a}|=5$, $|\boldsymbol{b}|=4$,$\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=45°$,求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.

2. 已知 $\boldsymbol{a}=(3,4)$,$\boldsymbol{b}=(6,8)$,求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$, $|\boldsymbol{a}|$, $|\boldsymbol{b}|$, $\cos\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$.

3. 已知 $\boldsymbol{a}=(3,2)$,$\boldsymbol{b}=(1,-2)$,求 $4\boldsymbol{a}\cdot2\boldsymbol{b}$.

4. 已知 $\boldsymbol{a}=(-2,4)$,$\boldsymbol{b}=(3,m)$,若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,求 m 的值.

5. 已知 $\boldsymbol{a}=(1,2)$,$\boldsymbol{b}=(-3,2)$,当 k 为何值时：

(1)$(k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})$;

(2)$(k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})/\!/(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})$.

7.5 平面向量的应用

7.5.1 向量在几何中的应用举例

向量是既有大小又有方向的量，它既有数字特征又有几何特征.通过向量可以实现代数问题与几何问题的相互转化，所以向量是数形结合的桥梁.

注 意

遇到长度问题时，需要考虑向量的数量积.

例 1 平行四边形是表示向量加法与减法的几何模型.如图 7-18 所示，$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$，求平行四边形对角线的长度与两条邻边长度之间的关系.

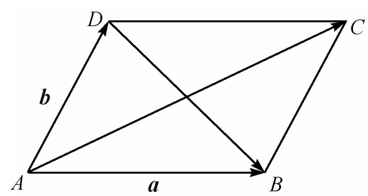


图 7-18

解 设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，则

$$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\overrightarrow{DB}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},$$

$$|\overrightarrow{AB}|^2=|\boldsymbol{a}|^2,|\overrightarrow{AD}|^2=|\boldsymbol{b}|^2.$$

因为

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{AC}|^2&=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\\&=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}\\&=|\boldsymbol{a}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2.\end{aligned}$$

同理

$$|\overrightarrow{DB}|^2=|\boldsymbol{a}|^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2,$$

所以

$$|\overrightarrow{AC}|^2+|\overrightarrow{DB}|^2=2(|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2)=2(|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AD}|^2),$$

即平行四边形两条对角线的长度的平方和等于两条邻边长度平方和的二倍.

例 2 如图 7-19 所示，AD,BE,CF 是$\triangle ABC$ 的三条高. 求证：AD,BE,CF 相交于一点.

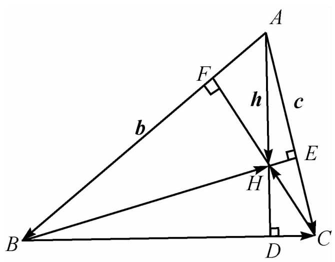


图 7-19

证明 设 BE,CF 相交于点 H，并设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{AH}=\boldsymbol{h}$，则$\overrightarrow{BH}=\boldsymbol{h}-\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{CH}=\boldsymbol{h}-\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}$.

因为$\overrightarrow{BH}\perp\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{CH}\perp\overrightarrow{AB}$，所以

$$(\boldsymbol{h}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=0,$$

$$(\boldsymbol{h}-\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{b}=0,$$

两式相减，整理得

$$\boldsymbol{h}\cdot(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})=0,$$

所以

$$\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC},$$

故$\overrightarrow{AH}$与$\overrightarrow{AD}$共线.

因此，AD,BE,CF 相交于一点.

一般地，用向量方法解决几何问题时的步骤如下：

(1)建立几何与向量的联系，用向量表示问题中涉及的几何元素（如点、线段、夹角等），将几何问题转化为向量问题；

(2)通过向量运算，研究几何元素之间的关系，如距离、夹角等；

(3)把运算结果“翻译”成几何关系.

7.5.2 向量在物理中的应用举例

在物理中，力、速度等都是既有大小又有方向的量，因此，向量是解决许多物理问题的有力工具.

例 3 已知力 $\boldsymbol{F}$ 与水平方向的夹角为 $30°$（斜向上），大小为 50 N，一个质量为 8 kg 的木块受力 $\boldsymbol{F}$ 的作用在动摩擦因数 $\mu=0.02$ 的水平平面上运动了 20 m. 求力 $\boldsymbol{F}$ 和摩擦力 $\boldsymbol{f}$ 所做的功分别是多少？（$g=10\ \mathrm{m^2/s}$）

解 如图 7-20 所示，设木块的位移为 $\boldsymbol{s}$，则

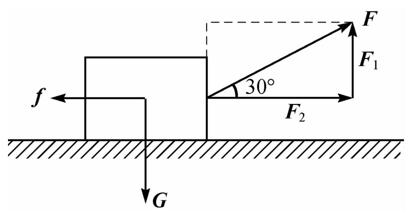


图 7-20

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}&=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{s}|\cos 30°\\&=50\times 20\times\frac{\sqrt{3}}{2}\\&=500\sqrt{3}(\mathrm{J}).\end{aligned}$$

木块的重力为

$$\boldsymbol{G}=mg=8\times 10=80(\mathrm{N}).$$

将力 $\boldsymbol{F}$ 分解，它在铅垂线方向上的分力 $\boldsymbol{F}_1$ 的大小为

$$|\boldsymbol{F}_1|=|\boldsymbol{F}|\sin 30°=50\times\frac{1}{2}=25(\mathrm{N}),$$

所以摩擦力 $\boldsymbol{f}$ 的大小为

$$\boldsymbol{f}=|\mu(\boldsymbol{G}-|\boldsymbol{F}_1|)|=(80-25)\times 0.02=1.1(\mathrm{N}).$$

因此，

$$\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{s}=|\boldsymbol{f}||\boldsymbol{s}|\cos 180°=1.1\times 20\times(-1)=-22(\mathrm{J}).$$

故力 $\boldsymbol{F}$ 和摩擦力 $\boldsymbol{f}$ 所做的功分别是 $500\sqrt{3}$ J 和 -22 J.

例 4 一架飞机从 A 地向北偏西 $60°$ 的方向飞行

1 000 km 到达 B 地，然后向 C 地飞行. 设 C 地恰好在 A 地的南偏西 60°方向，且 A，C 两地相距 2 000 km，求飞机从 B 地到 C 地的位移.

解　如图 7-21 所示，设 A 在东西基线和南北基线的交点处. 由题意可知，$\overrightarrow{AB}$的方向是北偏西 60°，$|\overrightarrow{AB}|=1\ 000$ km；$\overrightarrow{AC}$的方向是南偏西 60°，$|\overrightarrow{AC}|=2\ 000$ km，所以$\angle BAC=60°$.

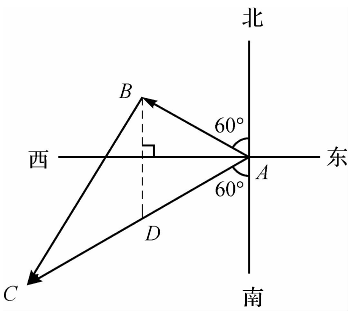


图 7-21

过点 B 作东西基线的垂线，交 AC 于 D，则$\triangle ABD$ 为正三角形，所以

$$BD=AD=AB=1\ 000\ \text{km}.$$

又

$$AC=2\ 000\ \text{km},$$

所以

$$CD=1\ 000\ \text{km},$$

故

$$CD=BD,$$

所以

$$\angle CBD=\angle BCD=\frac{1}{2}\angle BDA=30°,$$

所以

$$\angle ABC=90°.$$

$$BC=AC\sin 60°=2\ 000\times\frac{\sqrt{3}}{2}=1\ 000\sqrt{3}(\text{km}),$$

$$|\overrightarrow{BC}|=1\ 000\sqrt{3}\ \text{km}.$$

故飞机从 B 地到 C 地的位移是 $1\,000\sqrt{3}$ km，方向是南偏西 30°.

一般地，用向量方法解决物理问题时的步骤如下：

(1)将相关物理量用几何图形表示出来；

(2)将物理问题抽象成数学模型，转化为数学问题；

(3)将数学问题还原为物理问题.

习题 7.5

1. 在△ABC 中，若 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$，则△$ABC$ 是(　　).

A. 直角三角形

B. 锐角三角形

C. 钝角三角形

D. 等腰三角形

2. 在平行四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，且$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2$. 求证：四边形 $ABCD$ 为矩形.

3. 如图 7-22 所示，一个三角形铁支架 ABC 安装在墙壁上，$AB:AC:BC=3:4:5$，在 B 处挂一个 6 kg 的物体，求 AB 与 BC 所受的力.($g=10$ m^2/s)

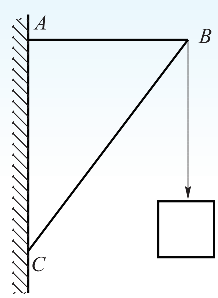
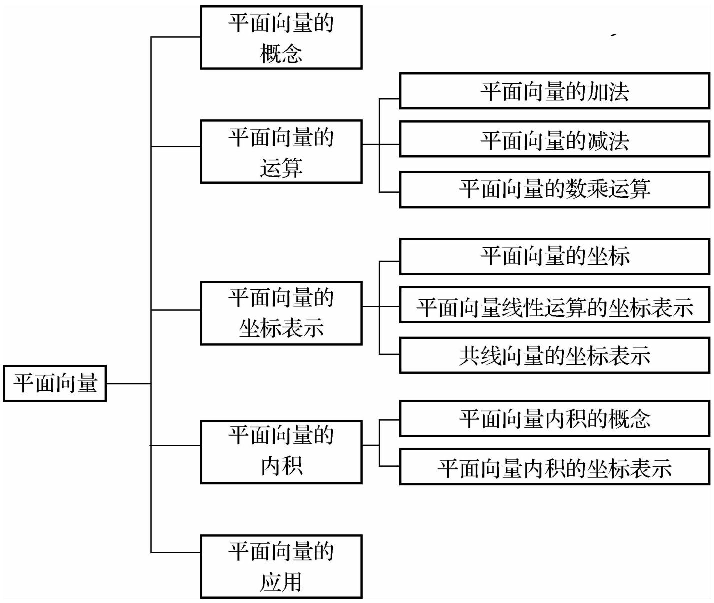


图 7-22

单元小结

一、知识脉络图



二、主要内容

本单元主要介绍向量的概念、向量的运算、向量的坐标表示、向量的内积及向量的实际应用等内容.

1. 向量的概念

平面上带有指向的线段(有向线段)叫作平面向量,线段的指向就是平面向量的方向,线段的长度表示平面向量的大小,有向线段的起点叫作平面向量的起点,有向线段的终点叫作平面向量的终点.

向量的长度叫作向量的模. 模为1的向量叫作单位向量,方向相同或相反的两个非零向量叫作互相平行的向量.

2. 平面向量的运算

向量有加法、减法和数乘运算,它们统称为向量的线性计算.

(1)加法

三角形法则:$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

平行四边形法则:$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$. 其中 AC 是以 AB,AD

为邻边的平行四边形的对角线.

(2)减法

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}),$$

用有向线段表示向量时，有$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$.

(3)数乘

实数与向量的乘法运算叫作向量的数乘运算，记作 $\lambda\boldsymbol{a}$.

向量的加法与数乘运算满足下列运算法则：对任意向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$，任意实数 λ,μ，有

(1)$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

(2)$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$；

(3)$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$；

(4)$(\lambda\mu)\boldsymbol{a}=\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})$；

(5)$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$；

(6)$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

3. 向量的坐标表示

(1)在平面直角坐标系中，向量可唯一表示为 $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$，其中 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}$ 为基本单位向量，则向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标可表示为(x,y).

(2)一般地，在平面直角坐标系中，$\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$，则

$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(x_1+x_2,y_1+y_2)$；

$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(x_1-x_2,y_1-y_2)$；

$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=(\lambda x_1,\lambda x_2)$.

(3)对于非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，设 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$，当 $\lambda\neq0$ 时，有

$$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow x_1y_2-x_2y_1=0.$$

4. 向量的内积

利用向量的内积可以统一地研究有关长度、角度、垂直等度量问题.

任给两个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，实数

$$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$$

称为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的内积，记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.

向量的内积运算满足以下运算律：对任意向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$，任意实数 $\boldsymbol{\lambda}$，有

(1)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$;

(2)$\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})$;

(3)$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$.

向量内积的应用:

(1)计算两向量的长度:设 $\boldsymbol{a}$ 的直角坐标为(x_1,y_1),则

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}=\sqrt{x_1^2+y_1^2}.$$

(2)计算两点间的距离:在直角坐标系中,设点 $P(x_1,y_1)$,点 $Q(x_2,y_2)$,则

$$|PQ|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

(3)计算两个非零向量的夹角:设两个非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的直角坐标为(x_1,y_1),(x_2,y_2),则

$$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}\cdot\sqrt{y_1^2+y_2^2}}.$$

(4)判断两个向量是否垂直:设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的直角坐标分别为(x_1,y_1),(x_2,y_2),则

$$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0.$$

5. 向量的应用

学会解决平面向量在几何和物理中的实际应用问题.

复习题

A 组

1. 选择题:

(1)平面向量定义的要素是(　　).

A. 大小和起点　　B. 方向和起点

C. 大小和方向　　D. 大小、方向和起点

(2)$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}=$(　　).

A. $2\overrightarrow{BC}$　　B. $2\overrightarrow{CB}$

C. $\boldsymbol{0}$　　D. 0

(3)设点 $A(x_1,y_1)$,点 $B(x_2,y_2)$,则向量$\overrightarrow{AB}$的坐标为(　　).

A. (x_1-x_2,y_1-y_2)　　B. (x_1-y_1,x_2-y_2)

C. (x_2-x_1, y_2-y_1)　　D. (y_1-x_1, y_2-x_2)

(4)设$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-4$, $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{2}$, $|\boldsymbol{b}|=2\sqrt{2}$,则$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=$(　　).

A. $0°$　　B. $90°$

C. $180°$　　D. $270°$

(5)已知$A(1,-2)$,$B(2,1)$,$C(0,k)$三点共线,则k的值是(　　).

A. 7　　B. -5

C. $\frac{5}{3}$　　D. 3

2. 填空题:

(1)$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}=$________.

(2)已知$A(3,-4)$,$B(6,4)$,则$\overrightarrow{AB}=$__________,$|\overrightarrow{BA}|=$________.

(3)向量$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$的坐标分别为$(2,1)$,$(-1,3)$,则$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$的坐标为________,$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$的坐标为________,$3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$的坐标为________.

(4)已知向量$\boldsymbol{a}=(3,-2)$,$\boldsymbol{b}=(2,x)$是垂直向量,则$x=$________.

3. 在平行四边形$ABCD$中,O为对角线的交点,试用$\overrightarrow{BA}$,$\overrightarrow{BC}$表示$\overrightarrow{BO}$.

4. 已知$A(2,3)$,$\overrightarrow{AB}=(-2,4)$,求点$B$的坐标.

5. 已知点$A(-2,1)$,$B(1,7)$,且$\boldsymbol{a}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$,求向量$\boldsymbol{a}$的坐标.

6. 已知$\boldsymbol{a}=(-2,2)$,$\boldsymbol{b}=(-4,3)$,$\boldsymbol{c}=(5,3)$,求:

(1)$2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c}$;

(2)$3(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$.

7. 平面内有三点$A(5,2)$,$B(1,0)$,$C(2,3)$,判断$\triangle ABC$的形状.

8. 用两条成$120°$角等长的绳子挂一个灯具,已知灯具的质量为10,则每根绳子的拉力大小是多少?

B 组

1. 已知点$A(4,-5)$,$B(4,9)$,$\overrightarrow{OA_1}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{OB_1}=$

$\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$，求$\overrightarrow{A_1B_1}$的坐标.

2. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,3)$，$\boldsymbol{b}=(3,0)$，求下列各角的余弦值：

(1)$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$；

(2)$\langle\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\rangle$；

(3)$\langle\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\rangle$.

3. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,-1)$，$\boldsymbol{b}=(-3,4)$，且 $m\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 垂直，求 m 的值.

知识拓展

欧几里得

欧几里得(Euclid，公元前330年—公元前275年)是古希腊著名的数学家、欧氏几何学的开创者. 欧几里得生于雅典，当时雅典就是古希腊文明的中心，浓郁的文化气氛深深地感染了欧几里得，他还是个十几岁的少年时，就迫不及待地想进入“柏拉图学园”学习.

欧几里得进入学园之后，便全身心地沉浸在数学王国里. 他潜心求索，以继承柏拉图的学术为奋斗目标，除此之外，他哪儿也不去，什么也不干，熬夜翻阅和研究了柏拉图的所有著作与手稿，可以说，连柏拉图的亲传弟子也没有谁能像他那样熟悉柏拉图的学术思想、数学理论. 经过对柏拉图思想的深入探究，他得出结论：图形是神绘制的，所有一切现象的逻辑规律都体现在图形之中. 因此，对智慧的训练就应该从以图形为主要研究对象的几何学开始. 他确实领悟到了柏拉图思想的要旨，并开始沿着柏拉图当年走过的道路，把几何学的研究作为自己的主要任务，并最终取得了令世人敬仰的成就.

最早的几何学兴起于公元前7年的古埃及，后经古希腊人传到古希腊的都城，又借毕达哥拉斯学派系统奠基. 在欧几里得以前，人们已经积累了许多几何学的知识，然而这些知识当中存在一个很大的缺点和不足，就是缺乏系统性. 大多数知识是片断、零碎的，公理与公理之间、证明与证明之间并没有什么很强的联系性，更不要说对公式和定理进行严格