第1单元　三角公式及应用

引　例

刘徽的《海岛算经》中列有“海岛测望”一题：如图1-1，有人望海岛 AB，立两个高为3丈的标杆 CD 与 EF，其距离为1 000步，并且两个标杆的上下两端在同一水平线上．从标杆 CD 退行123步，海岛峰顶 A、标杆上端 C 与 G 点共线．从标杆 EF 退行127步，海岛峰顶 A、标杆上端 E 与 H 点共线．问海岛的高度 AB 及海岛与标杆的距离 BD 各是多少？

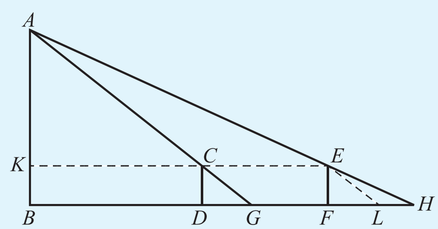


图 1-1

1.1 两角和与差的三角函数公式

1.1.1 两角和与差的余弦公式

我们知道：

$$\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2},\cos 60^\circ=\frac{1}{2},\cos 30^\circ+\cos 60^\circ=\frac{1+\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos(30^\circ+60^\circ)=\cos 90^\circ=0,$$

显然

$$\cos 30^\circ+\cos 60^\circ\neq\cos(60^\circ+30^\circ).$$

由此可知，一般情况下，对于任意两个角 α,β，$\cos(\alpha+\beta)\neq\cos\alpha+\cos\beta$. 那么，$\cos(\alpha+\beta)$ 与 $\cos\alpha$，$\cos\beta$ 到底有什么关系呢？

注 意

设向量 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_2)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$，且 $<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>=\theta$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\theta$，又由于 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2$，则 $|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\theta=x_1x_2+y_1y_2$.

如图 1-2 所示，设 $\angle BOA$，$\angle COA$ 的大小分别为 α,β. 为简单起见，我们先假定 α,β 均为锐角. 以 OA 为始边，记 $\angle BOA$，$\angle COA$ 的终边分别与单位圆的交点为 B，C. 点 B 的坐标为 $(\cos\alpha,\sin\alpha)$，点 C 的坐标为 $(\cos\beta,-\sin\beta)$，因此，向量 $\overrightarrow{OB}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$，向量 $\overrightarrow{OC}=(\cos\beta,-\sin\beta)$，且 $|\overrightarrow{OB}|=1$，$|\overrightarrow{OC}|=1$，于是

$$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=|\overrightarrow{OB}|\cdot|\overrightarrow{OC}|\cdot\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha+\beta),$$

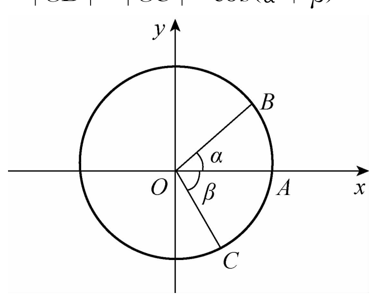


图 1-2

又由于

$$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=(\cos\alpha,\sin\alpha)\cdot(\cos\beta,-\sin\beta)$$
$$=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,$$

所以

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.$$

由此，我们得到了两角和的余弦公式

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta. \qquad (1\text{-}1)$$

此式反映了$\alpha+\beta$的余弦与α、β的正弦、余弦之间的关系. 因此，公式(1-1)称为**两角和的余弦公式.**

将式(1-1)中的β换成$-\beta$，则有

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos[\alpha+(-\beta)]$$
$$=\cos\alpha\cos(-\beta)-\sin\alpha\sin(-\beta)$$
$$=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.$$

由此，我们得到了两角差的余弦公式

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta. \qquad (1\text{-}2)$$

此式反映了$\alpha-\beta$的余弦与α，β的正弦、余弦之间的关系. 因此，公式(1-2)称为**两角差的余弦公式.**

式(1-1)与式(1-2)统称为两角和与差的余弦公式.

例 1 不用计算器，求 $\cos 75^\circ$ 和 $\cos 15^\circ$ 的值.

解 (1) 将 75° 看成是 30° 与 45° 的和，利用式(1-1)得

$$\cos 75^\circ=\cos(30^\circ+45^\circ)$$
$$=\cos 30^\circ\cos 45^\circ-\sin 30^\circ\sin 45^\circ$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

(2) 将 15° 看成是 45° 与 30° 的差，利用式(1-2)得

$$\cos 15^\circ=\cos(45^\circ-30^\circ)$$
$$=\cos 45^\circ\cos 30^\circ+\sin 45^\circ\sin 30^\circ$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

> **想一想**
>
> 例 1 是否还有别的解法？

例 2 设 $\cos\alpha=\frac{3}{5}$，$\cos\beta=\frac{4}{5}$，并且α和β都是锐角，求 $\cos(\alpha+\beta)$ 的值.

解 可利用式(1-1)来进行求解，但首先应求出 $\sin\alpha$，

$\sin\beta$ 的值.

因为 $\cos\alpha=\frac{3}{5}$, $\cos\beta=\frac{4}{5}$,并且 α 和 β 都是锐角,所以由 $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$, $\cos^2\beta+\sin^2\beta=1$,得

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{4}{5},\ \sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\frac{3}{5},$$

因此,利用式(1-1)得

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta)&=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\\&=\frac{3}{5}\times\frac{4}{5}-\frac{4}{5}\times\frac{3}{5}=0.\end{aligned}$$

例 3 已知 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{3}$, $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$,求 $\cos\alpha$.

解 可利用式(1-2)来进行求解. 但要先求出 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$ 的值.

因为 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$,则

$$\alpha+\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{3}{4}\pi,\frac{5}{4}\pi\right),$$

又因为 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{3}$,则

$$\begin{aligned}\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)&=-\sqrt{1-\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}\\&=-\frac{2\sqrt{2}}{3}.\end{aligned}$$

因此,利用式(1-2)得

$$\begin{aligned}\cos\alpha&=\cos\left[\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\pi}{4}\right]\\&=\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{4}+\\&\quad\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sin\frac{\pi}{4}\\&=-\frac{2\sqrt{2}}{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\\&=\frac{\sqrt{2}-4}{6}.\end{aligned}$$

例 4 化简下列各式：

（1）$\cos 40^\circ\cos 20^\circ-\sin 40^\circ\sin 20^\circ$；

（2）$\cos(\alpha-\beta)\cos\beta-\sin(\alpha-\beta)\sin\beta$.

解 和角公式(1-1)把角 $\alpha+\beta$ 的三角函数转化成了 α,β 的三角函数式.如果反过来，从右向左使用式(1-1)，我们就可以将上述的三角函数式化简.

（1）$\cos 40^\circ\cos 20^\circ-\sin 40^\circ\sin 20^\circ=\cos(40^\circ+20^\circ)$

$=\cos 60^\circ=\dfrac{1}{2}$.

（2）$\cos(\alpha-\beta)\cos\beta-\sin(\alpha-\beta)\sin\beta=\cos[(\alpha-\beta)+\beta]$

$=\cos\alpha$.

议一议

如何利用两角和的余弦公式来推导出等式 $\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\sin\alpha$ 呢?

做一做

1. 不用计算器，求下列各式的值：

（1）$\cos 105^\circ$；（2）$\cos 225^\circ$.

2. 化简下列各式，并求值：

（1）$\cos 80^\circ\cos 20^\circ+\sin 80^\circ\sin 20^\circ$；

（2）$\dfrac{1}{2}\cos 15^\circ+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 15^\circ$.

1.1.2 两角和与差的正弦公式

我们已经学习了两角和与差的余弦公式，那么，两角和与差的正弦公式是怎么样的呢?

根据诱导公式 $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$，$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$ 可以实现正弦和余弦之间的转化，因此

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta)&=\cos\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right]=\cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right]\\&=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta\\&=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.\end{aligned}$$

由此，我们得到了两角和的正弦公式

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta. \tag{1-3}$$

此式反映了 $\alpha+\beta$ 的正弦函数值与 α、β 的正弦、余弦之间的关系. 因此,式(1-3) 称为**两角和的正弦公式**.

将式(1-3) 中的 β 换成 $-\beta$,则有

$$\begin{aligned}\sin(\alpha-\beta)&=\sin[\alpha+(-\beta)]\\&=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)\\&=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.\end{aligned}$$

由此,我们得到了两角差的正弦公式

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta. \tag{1-4}$$

此式反映了 $\alpha-\beta$ 的正弦函数值与 α、β 的正弦、余弦之间的关系. 因此,式(1-4) 称为两角差的正弦公式.

例 5 不用计算器,求 $\sin 75^\circ$ 和 $\sin 15^\circ$ 的值.

解 (1) 将 75° 看成是 30° 与 45° 的和,利用式(1-3) 得

$$\begin{aligned}\sin 75^\circ=\sin(30^\circ+45^\circ)&=\sin 30^\circ\cos 45^\circ+\cos 30^\circ\sin 45^\circ\\&=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}.\end{aligned}$$

(2) 将 15° 看成是 45° 与 30° 的差,利用式(1-4) 得

$$\begin{aligned}\sin 15^\circ=\sin(45^\circ-30^\circ)&=\sin 45^\circ\cos 30^\circ-\cos 45^\circ\sin 30^\circ\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

想一想

例 5 是否还有别的解法?

例 6 已知 $\cos\alpha=\frac{3}{5}$,$\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$,求 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$ 的值.

解 利用式(1-3),首先应求出 $\sin\alpha$ 的值.

由于 $\cos\alpha=\frac{3}{5}$,$\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$,所以

$$\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=-\frac{4}{5},$$

则

$$\begin{aligned}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)&=\sin\alpha\cos\frac{\pi}{3}+\cos\alpha\sin\frac{\pi}{3}\\&=\left(-\frac{4}{5}\right)\times\frac{1}{2}+\frac{3}{5}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}-4}{10}.\end{aligned}$$

例 7 化简下列各式:

(1) $\sin 12^\circ\cos 18^\circ+\cos 12^\circ\sin 18^\circ$;

(2) $\sin\beta\cos(\alpha-\beta)+\cos\beta\sin(\alpha-\beta)$.

解 和角公式(1-3)把角$\alpha+\beta$的三角函数转化成了α,β的三角函数式.如果反过来,从右向左使用式(1-3),我们就可以将上述的三角函数式化简.

(1) $\sin 12^\circ\cos 18^\circ+\cos 12^\circ\sin 18^\circ=\sin(12^\circ+18^\circ)$

$=\sin 30^\circ=\dfrac{1}{2}$.

(2) $\sin\beta\cos(\alpha-\beta)+\cos\beta\sin(\alpha-\beta)=\sin[\beta+(\alpha-\beta)]$

$=\sin\alpha$.

注 意

逆向使用公式是非常重要的,往往会给解题带来新的思路,使问题的解决变得简单化.

知识卡片

和角公式的几何证明

1. 圆内接三角形

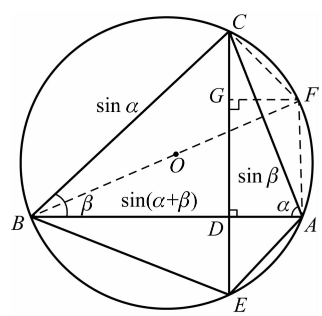


图 1-3

如图 1-3 所示,在外接圆直径为 1 的$\triangle ABC$中,$\angle BAC=\alpha$,$\angle ABC=\beta$,$CD\perp AB$,垂足为D,连接BO并延长,与圆相交于F,连接CF,AF,于是可知$BC=\sin\alpha$,同理$AC=\sin\beta$,$AB=\sin(\alpha+\beta)$,$BD=\sin\alpha\cos\beta$,$AD=\cos\alpha\sin\beta$.又因为$AB=AD+BD$.所以可以得到

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.$$

延长CD与圆相交于E,连接BE、AE.同样也可以得到$CD=\sin\alpha\sin\beta$,$DE=\cos\alpha\cos\beta$,过F作$FG\perp CD$,垂足为G,容易得知$AF=DG=CD-CG=CD-DE=\sin\alpha\sin\beta-\cos\alpha\cos\beta$.又因为$AF=\cos\angle AFB=\cos[\pi-(\alpha+\beta)]=-\cos(\alpha+\beta)$.所以可以得到

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.$$

2. 托勒密定理

托勒密定理：圆的内接凸四边形两对边乘积的和等于两条对角线的乘积.

如图 1-4 所示，四边形 $ABCD$ 内接于直径为 1 的圆 O，对角线 AC 是圆 O 的直径，连接 DO 并延长，与圆 O 相交于 E，依次连接 AE，BE，CE. 由托勒密定理可知：

$$AC\times BD=AB\times CD+AD\times BC,$$

$$AB\times EC=AE\times BC+BE\times AC.$$

又因为

$BD=\sin(\alpha+\beta)$，$BE=\cos(\alpha+\beta)$，$AD=EC=\cos\alpha$，$CD=AE=\sin\alpha$，$BC=\sin\beta$，$AB=\cos\beta$，故可得

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.$$

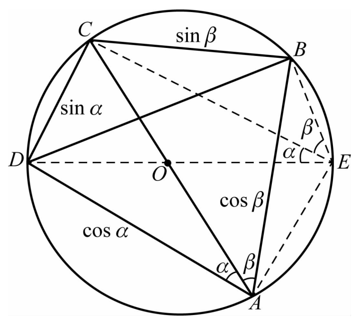


图 1-4

3. 面积变换法

受中国古代数学家赵爽证明勾股定理的方法启发，我们构造两个对角线为 1，长和宽分别为 $\sin\alpha$、$\cos\alpha$ 和 $\sin\beta$、$\cos\beta$ 的矩形 $ABCD$ 和 $GCEF$，如图 1-5 所示. CEF 平移到右上和左上位置，构成一个边长为 1、一组对角为 $\alpha+\beta$ 的菱形 $ACEF$. 显然它的面积为 $\sin(\alpha+\beta)$.

另一方面，在等腰三角形 ACH 和直角三角形 HCK 中，分布由余弦定理和勾股定理得 $CH^2=1^2+1^2-2\cos(\alpha+\beta)=2-2\cos(\alpha+\beta)$，$CH^2=(\cos\beta-\cos\alpha)^2+$

$(\sin\alpha+\sin\beta)^2=2-2(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)$. 因此可证得 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$.

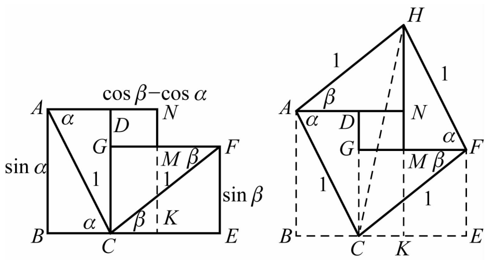


图 1-5

做一做

1. 求下列各式的值：

(1) $\sin 105^\circ$； (2) $\sin 165^\circ$； (3) $\sin 225^\circ$.

2. 化简下列各式，并求值：

(1) $\sin 26^\circ\cos 19^\circ+\cos 26^\circ\sin 19^\circ$；

(2) $\sin 80^\circ\cos 35^\circ-\cos 80^\circ\sin 35^\circ$.

3. 已知 $\cos\alpha=-\frac{5}{13}$，且 α 是第三象限角，求 $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$ 的值.

1.1.3 两角和与差的正切公式

根据两角和与差的正弦公式、余弦公式可知

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta},$$

当 $\cos\alpha\cdot\cos\beta\neq0$ 时，上式分子分母同除以 $\cos\alpha\cos\beta$ 可得

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}. \tag{1-5}$$

同理，可得出

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}. \tag{1-6}$$

注 意

在两角和与差的正切公式中，α 和 β 的取值应使式子的左右两端都有意义.

想一想

例 8 求 $\tan 285°$ 的值还有其他算法吗?

例 8 不用计算器,求 $\tan\frac{11\pi}{12}$ 和 $\tan 285°$ 的值.

解 (1) $\tan\frac{11\pi}{12}=-\tan\frac{\pi}{12}=-\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\frac{\pi}{6}}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{6}}=-\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}=-2+\sqrt{3}$;

(2) $\tan 285°=\tan(360°-75°)=-\tan 75°=-\tan(45°+30°)=-\frac{\tan 45°+\tan 30°}{1-\tan 45°\tan 30°}=-2-\sqrt{3}$.

例 9 求下列各式的值:

(1) $\tan 20°+\tan 40°+\sqrt{3}\tan 20°\tan 40°$;(2) $\frac{\sqrt{3}-\tan 15°}{1+\sqrt{3}\tan 15°}$.

分析 (1) 将式(1-5) 变形为 $\tan\alpha+\tan\beta=\tan(\alpha+\beta)\cdot(1-\tan\alpha\tan\beta)$,(2) 可以利用式(1-6) 进行求解.

解 (1) $\tan 20°+\tan 40°+\sqrt{3}\tan 20°\tan 40°=\tan 60°(1-\tan 20°\tan 40°)+\sqrt{3}\tan 20°\tan 40°=\sqrt{3}-\sqrt{3}\tan 20°\tan 40°+\sqrt{3}\tan 20°\tan 40°=\sqrt{3}$.

(2) $\frac{\sqrt{3}-\tan 15°}{1+\sqrt{3}\tan 15°}=\frac{\tan 60°-\tan 15°}{1+\tan 60°\tan 15°}=\tan(60°-15°)=\tan 45°=1$.

做一做

1. 求下列各式的值:

(1) $\tan 105°$; (2) $\tan 15°$.

2. 求下列各式的值:

(1) $\tan 70°+\tan 50°-\sqrt{3}\tan 70°\tan 50°$;

(2) $\frac{1+\tan 15°}{1-\tan 15°}$.

3. 已知 $\tan\alpha=\frac{1}{2}$,$\tan(\alpha-\beta)=-\frac{2}{5}$,求 $\tan(2\alpha-\beta)$ 的值.

习题 1.1

1. 选择题.

(1) $\sin(\alpha-\beta)\cos\beta+\cos(\alpha-\beta)\sin\beta$ 可简化为(　　).

A. $\sin\alpha$　　B. $\cos(\alpha-2\beta)$　　C. $\cos\alpha$　　D. $\sin(\alpha-2\beta)$

(2) $\cos 78^\circ\cos 42^\circ-\sin 78^\circ\sin 42^\circ$ 的值是(　　).

A. $\cos 36^\circ$　　B. $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $-\dfrac{1}{2}$　　D. $\sin 36^\circ$

(3) 已知 $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{1}{3}$，$\tan\alpha=2$，则 $\tan\beta=$(　　).

A. 5　　B. -5　　C. 1　　D. -1

2. 填空题.

(1) $\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=$ ________.

(2) $\cos[(\alpha+\beta)+\gamma]$

$=\cos(\quad)\cos(\quad)$ ________ $\sin(\quad)\sin(\quad)$.

(3) $\cos[(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)]$

$=\cos(\quad)\cos(\quad)$ ________ $\sin(\quad)\sin(\quad)$.

3. 计算下列各式的值：

(1) $\cos 105^\circ$；　(2) $\sin 135^\circ$；

(3) $1-2\sin^2\dfrac{\pi}{12}$；(4) $\tan 75^\circ$；

(5) $\cos 80^\circ\cos 55^\circ-\cos 10^\circ\cos 35^\circ$；

(6) $\dfrac{\tan 42^\circ+\tan 18^\circ}{1-\tan 42^\circ\tan 18^\circ}$.

4. 已知 $\cos\alpha=-\dfrac{5}{13}$，且 $\alpha\in\left(\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right)$，求 $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)$ 的值.

5. 在 $\triangle ABC$ 中，$\sin A=\dfrac{5}{13}$，$\cos B=\dfrac{3}{5}$，求 $\cos C$ 的值.

6. 求函数 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\dfrac{1}{2}\cos x$ 的最大值.

1.2 二倍角的三角函数公式

以两角和与差的三角函数公式为基础，可以推导出用角 α 的三角函数值表示角 2α 的三角函数的公式.

在式(1-1) 中，令 $\alpha=\beta$，就可以得到二倍角的余弦公式：

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= \cos(\alpha+\alpha)=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha\\ &=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha.\end{aligned}$$

即

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha. \tag{1-7}$$

同理，在式(1-3) 中，令 $\alpha=\beta$，就可以得到二倍角的正弦公式：

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha. \tag{1-8}$$

因为 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，所以式(1-7) 又可以写为

$$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1, \tag{1-9}$$

$$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha, \tag{1-10}$$

则还可以得到下列公式：

$$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}, \tag{1-11}$$

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}. \tag{1-12}$$

在式(1-5) 中，令 $\alpha=\beta$，就可以得到二倍角的正切公式：

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}. \tag{1-13}$$

式(1-7) ～ 式(1-13) 反映出具有二倍角关系的角的三角函数之间的关系，在三角计算中有着广泛的应用.

例 1 已知 $\cos\alpha=-\frac{5}{13}$，且 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，求 $\sin 2\alpha$，$\cos 2\alpha$，$\tan 2\alpha$ 的值.

解 因为 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，所以

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(-\frac{5}{13}\right)^2}=\frac{12}{13}.$$

利用式(1-8)可得

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\times\frac{12}{13}\times\left(-\frac{5}{13}\right)=-\frac{120}{169},$$

利用式(1-9)可得

$$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=2\times\left(-\frac{5}{13}\right)^2-1=-\frac{119}{169},$$

则

$$\tan 2\alpha=\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\frac{120}{119}.$$

例 2 不用计算器,求下列各式的值:

(1) $\sin 15^\circ\cos 15^\circ$;(2) $2\sin^2 22.5^\circ-1$.

解 (1) $\sin 15^\circ\cos 15^\circ=\frac{1}{2}\times(2\sin 15^\circ\cos 15^\circ)$

$$=\frac{1}{2}\sin(2\times 15^\circ)=\frac{1}{2}\sin 30^\circ=\frac{1}{4}.$$

(2) $2\sin^2 22.5^\circ-1=-(1-2\sin^2 22.5^\circ)$

$$=-\cos(2\times 22.5^\circ)=-\cos 45^\circ=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

例 3 已知 $\cos\frac{\alpha}{2}=-\frac{3}{5}$,且 $\alpha\in(\pi,2\pi)$,求 $\sin\alpha$ 和 $\cos\frac{\alpha}{4}$ 的值.

解 $\frac{\alpha}{2}$ 与 α,$\frac{\alpha}{2}$ 与 $\frac{\alpha}{4}$ 之间都是具有二倍关系的角,故可以使用二倍角公式来计算.

由 $\alpha\in(\pi,2\pi)$ 可知 $\frac{\alpha}{2}\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$,所以

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{1-\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\sqrt{1-(-\frac{3}{5})^2}=\frac{4}{5},$$

故

$$\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=2\times\frac{4}{5}\times\left(-\frac{3}{5}\right)=-\frac{24}{25}.$$

由 $\frac{\alpha}{2}\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 可知 $\frac{\alpha}{4}\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$,所以

$$\cos^2\frac{\alpha}{4}=\frac{1+\cos\frac{\alpha}{2}}{2}=\frac{1+\left(-\frac{3}{5}\right)}{2}=\frac{1}{5},$$

$$\cos\frac{\alpha}{4}=\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

例 4 化简 $\sin^2\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)+\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)-\sin^2\alpha$.

解 $\sin^2(\alpha-\frac{\pi}{6})+\sin^2(\alpha+\frac{\pi}{6})-\sin^2\alpha$

$$=\frac{1-\cos(2\alpha-\frac{\pi}{3})}{2}+\frac{1-\cos(2\alpha+\frac{\pi}{3})}{2}-\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left[\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)-\cos 2\alpha\right]$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(2\cos 2\alpha\cdot\cos\frac{\pi}{3}-\cos 2\alpha\right)$$

$$=\frac{1}{2}.$$

做一做

1. 根据二倍角公式，完成下列各题：

(1) $\sin 6\alpha=2\sin(\quad)\cos(\quad)$；

(2) $\sin\alpha=2\sin(\quad)\cos(\quad)$.

2. 已知 $\sin\alpha=\frac{5}{13}$，且 α 是第一象限的角，求 $\sin 2\alpha$，$\cos 2\alpha$，$\tan 2\alpha$ 的值.

3. 已知 $\tan 2\alpha=\frac{3}{4}$，求 $\tan\alpha$ 的值.

习题 1.2

1. 求下列各式的值：

(1) $\sin^2 15°-\cos^2 15°$；

(2) $\dfrac{\sin15°-\cos15°}{\sin15°+\cos15°}$；

(3) $\dfrac{\tan\frac{5\pi}{24}}{1-\tan^2\frac{5\pi}{24}}$；

(4) $\sin^2\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}$.

2. 利用二倍角公式化简下列各式：

(1) $(\sin\alpha-\cos\alpha)^2$；　　(2) $\cos^4\beta-\sin^4\beta$；

(3) $\dfrac{1}{1-\tan\alpha}-\dfrac{1}{1+\tan\alpha}$.

3. 已知 $\cos\alpha=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$\alpha\in\left(\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right)$，求 $\sin 2\alpha$，$\tan 2\alpha$ 的值.

4. 已知 $\sin\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{3}{5}$，$\cos\dfrac{\alpha}{5}=-\dfrac{4}{5}$，试确定角 α 所在象限.

5. 已知 $\tan\alpha=\dfrac{1}{7}$，$\tan\beta=\dfrac{1}{3}$，求 $\tan(\alpha+2\beta)$ 的值.

6. (1) 已知 $\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$，求 $\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$ 的值；

(2) 已知 $\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$，求 $\sin 2\alpha$ 的值；

(3) 已知 $\tan\left(\alpha-\dfrac{\beta}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$，$\tan\left(\beta-\dfrac{\alpha}{2}\right)=-\dfrac{1}{3}$，求 $\tan(\alpha+\beta)$ 的值.

7. 已知函数 $y=\sin^2x+2\sin x\cos x+3\cos^2x$，$x\in\mathbf{R}$.

(1) 求函数的最小正周期；

(2) 求函数的最大值.

1.3 三角函数的积化和差与和差化积

观察下列两角和与差的正弦公式：

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta,$$

两式相加得

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta,$$

即

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)].$$

同理，可得到

$$\begin{cases}\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)],\\ \cos\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)],\\ \cos\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)],\\ \sin\alpha\sin\beta=-\dfrac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)].\end{cases}\tag{1-14}$$

通过公式(1-14)，三角函数由积的形式转化成了和或差的形式，因此，我们称其为**积化和差公式.**

想一想

你能发现哪里运用了换元的思想吗？试着说一说换元的好处.

若令 $\alpha+\beta=\theta,\alpha-\beta=\varphi$，则 $\alpha=\dfrac{\theta+\varphi}{2},\beta=\dfrac{\theta-\varphi}{2}$，将其代入公式(1-14)中，可得

$$\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\cos\frac{\theta-\varphi}{2}=\frac{1}{2}[\sin(\frac{\theta+\varphi}{2}+\frac{\theta-\varphi}{2})]+\sin(\frac{\theta+\varphi}{2}-\frac{\theta-\varphi}{2})]$$

$$=\frac{1}{2}(\sin\theta+\sin\varphi),$$

即

$$\sin\theta+\sin\varphi=2\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\cos\frac{\theta-\varphi}{2}.$$

同理，可得到

$$\begin{cases}\sin\theta+\sin\varphi=2\sin\dfrac{\theta+\varphi}{2}\cos\dfrac{\theta-\varphi}{2},\\ \sin\theta-\sin\varphi=2\cos\dfrac{\theta+\varphi}{2}\sin\dfrac{\theta-\varphi}{2},\\ \cos\theta+\cos\varphi=2\cos\dfrac{\theta+\varphi}{2}\cos\dfrac{\theta-\varphi}{2},\\ \cos\theta-\cos\varphi=-2\sin\dfrac{\theta+\varphi}{2}\sin\dfrac{\theta-\varphi}{2}.\end{cases}\tag{1-15}$$

通过公式(1-15)，三角函数由和或差的形式转化成了积的形式，因此，我们称其为**和差化积公式.**

公式(1-14)和公式(1-15)的发现，实现了三角函数积的形式与和或差的形式的相互转化，为我们以后的计算和研究提供了方便.

例 1 把下列各式化成积的形式：

(1) $\cos 3\alpha+\cos\alpha$；　　(2) $1+\sin 2\alpha$.

解 （1）$\cos 3\alpha+\cos\alpha=2\cos\dfrac{3\alpha+\alpha}{2}\cos\dfrac{3\alpha-\alpha}{2}$

$=2\cos 2\alpha\cos\alpha$.

（2）$1+\sin 2\alpha=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha$

$=(\sin\alpha+\cos\alpha)^2$.

例 2 （半角公式）求证：

（1）$\sin\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$；（2）$\cos\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$；

（3）$\tan\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$.

证明 （1）由 $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$ 得

$$\cos\alpha=1-2\sin^2\frac{\alpha}{2},$$

即

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2},$$

所以

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}.$$

（2）由 $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$ 得

$$\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1,$$

即

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2},$$

所以

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}.$$

（3）将 $\sin^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{2}$ 和 $\cos^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1+\cos\alpha}{2}$ 两边分别相除，得

$$\tan^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha},$$

所以

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}.$$

做一做

1. 把下列各式化成和或差的形式：

（1）$2\sin 64^\circ\cos 10^\circ$；（2）$2\sin 84^\circ\cos 132^\circ$.

2. 把下列各式化成积的形式：

（1）$\sin 54^\circ + \sin 22^\circ$；（2）$\sin 5\alpha - \sin 3\alpha$.

习题 1.3

1. 求下列各式的值：

（1）$\sin 15^\circ\sin 75^\circ$；（2）$\sin 37.5^\circ\cos 7.5^\circ$；

（3）$\sin 105^\circ + \sin 15^\circ$；（4）$\cos 75^\circ + \cos 15^\circ$.

2. 化简：$\dfrac{\cos\alpha + \cos(120^\circ + \beta) + \cos(120^\circ - \beta)}{\sin\beta + \sin(120^\circ + \alpha) - \sin(120^\circ - \alpha)}$.

3. 求证：

（1）$\sin 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1 + \tan^2\alpha}$；（2）$\cos 2\alpha = \dfrac{1 - \tan^2\alpha}{1 + \tan^2\alpha}$；

（3）$\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$.

1.4 正弦型函数

1.4.1 正弦型函数的概念和性质

我们已经学习了正弦函数 $y = \sin x$ 和余弦函数 $y = \cos x$. 在物理学和电学中，我们经常会遇到形如 $y = A\sin(\omega x + \varphi)(A > 0, \omega > 0)$ 的函数，这类函数称为**正弦型函数**. 它与正弦函数 $y = \sin x$ 有着密切的关系.

我们先来讨论正弦型函数的周期. 在正弦型函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$ 中,令 $z=\omega x+\varphi$,则

$$y=A\sin(\omega x+\varphi)=A\sin z.$$

我们已经知道正弦函数 $y=\sin x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,周期为 2π,值域为 $[-1,1]$. 因此,函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,并且

$$\begin{aligned}y&=A\sin(\omega x+\varphi)=A\sin z=A\sin(z+2\pi)\\&=A\sin[(\omega x+\varphi)+2\pi]=A\sin\left[\omega\left(x+\frac{2\pi}{\omega}\right)+\varphi\right],\end{aligned}$$

即 $A\sin(\omega x+\varphi)=A\sin\left[\omega\left(x+\frac{2\pi}{\omega}\right)+\varphi\right](A>0,\omega>0)$.

设 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$,则 $f(x)=f\left(x+\frac{2\pi}{\omega}\right)$. 因此,正弦型函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$ 也是周期函数,其周期为 $T=\frac{2\pi}{\omega}$.

由于正弦函数 $y=\sin x$ 的值域为 $[-1,1]$,所以 $y=A\sin z(A>0)$ 的值域为 $[-A,A]$,即正弦型函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$ 的最大值为 A,最小值为 $-A$.

综上所述,正弦型函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$ 主要有以下性质:

(1) 定义域为 $\mathbf{R}$;

(2) 周期为 $T=\frac{2\pi}{\omega}$;

(3) 值域为 $[-A,A]$,即最大值为 A,最小值为 $-A$.

例 1 求正弦型函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 和 $y=\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{2\pi}{5}\right)$ 的周期.

解 根据正弦型函数的周期公式 $T=\frac{2\pi}{\omega}$,可知 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的周期为

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{2}=\pi;$$

$y=\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{2\pi}{5}\right)$ 的周期为

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi.$$

例 2 求函数 $y=4\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的周期和最大值、最小值，并求在什么情况下函数取得最大值和最小值.

解 根据正弦型函数的性质，我们可得函数 $y=4\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的周期为

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{2}=\pi.$$

设 $z=2x+\frac{\pi}{3}$，则 $x=\frac{z}{2}-\frac{\pi}{6}$，所以

当 $z=2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，即 $x=k\pi+\frac{\pi}{12}(k\in\mathbf{Z})$ 时，函数 $y=4\sin z$ 有最大值，最大值为 4；

当 $z=2k\pi-\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，即 $x=k\pi-\frac{5\pi}{12}(k\in\mathbf{Z})$ 时，函数 $y=4\sin z$ 有最小值，最小值为 -4.

综上，当 $x=k\pi+\frac{\pi}{12}(k\in\mathbf{Z})$ 时，函数 $y=4\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 取得最大值 4；当 $x=k\pi-\frac{5\pi}{12}(k\in\mathbf{Z})$ 时，函数 $y=4\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 取得最小值 -4.

例 3 求函数 $y=\cos x+\sin x$ 的最大值和最小值.

解 由公式(1-3) 有

$$\begin{aligned}y=\cos x+\sin x&=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right)\\&=\sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos x+\cos\frac{\pi}{4}\cdot\sin x\right)=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right),\end{aligned}$$

故函数 $y=\cos x+\sin x$ 的最大值为 $\sqrt{2}$，最小值为 $-\sqrt{2}$.

一般地，研究函数 $y=a\sin x+b\cos x(a>0,b>0)$ 时，首先要把函数转化为正弦型函数 $y=A\sin(x+\theta)$ 的形式. 如图 1-6 所示，考察以 (a,b) 为坐标的点 P，设以 OP 为终边的角为 θ，则

$$\cos\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\sin\theta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\tan\theta=\frac{b}{a},$$

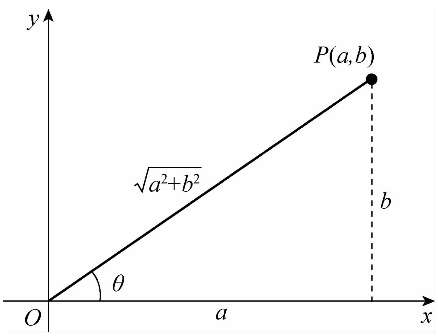


图 1-6

于是

$$
\begin{aligned}
a\sin x+b\cos x&=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right)\\
&=\sqrt{a^2+b^2}(\cos\theta\sin x+\sin\theta\cos x)\\
&=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\theta),
\end{aligned}
$$

即 $A=\sqrt{a^2+b^2}$，角 θ 的值可以由 $\tan\theta=\dfrac{b}{a}$ 确定(角 θ 所在的象限与点 P 所在的象限相同).

做一做

1. 求下列函数的最大值、最小值和周期：

(1) $y=8\sin 2x$；　　(2) $y=3\sin\dfrac{x+\pi}{3}$.

2. 求下列函数的最大值和最小值，并求出在什么情况下函数取得最大值和最小值：

(1) $y=13\sin\left(4x+\dfrac{\pi}{3}\right)$；

(2) $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x$.

1.4.2 正弦型曲线

在研究正弦函数 $y=\sin x$ 的图像时，我们介绍过“五点法”作图，即选取 $(0,0)$，$\left(\dfrac{\pi}{2},1\right)$，$(\pi,0)$，$\left(\dfrac{3\pi}{2},-1\right)$，$(2\pi,0)$ 作为五个特殊点来作图. 正弦型函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>$

$0,\omega>0$)的图像与正弦函数 $y=\sin x$ 的图像类似,我们一般也采用“五点法”来作正弦型函数的图像.正弦型函数的图像称为**正弦型曲线**.

在 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 中,令 $z=\omega x+\varphi$,我们分别取 $z=0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2},2\pi$,求出对应的 x 的值和函数值 y,构成五组 (x,y).分别以每组的 (x,y) 为坐标描点,描出对应的五个关键点,然后用光滑的曲线连接各点,即可以得到正弦型函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$ 在一个周期内的图像.

下面我们以具体的题为例,用“五点法”作出几个正弦型函数在一个周期内的简图,然后观察正弦型曲线的特征.

例 4 利用“五点法”作出正弦型函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 在一个周期内的简图.

解 在函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 中 $\omega=2$,因此周期为 $T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

为求出图像上的五个关键点的横坐标,令 $z=2x+\frac{\pi}{3}$,分别取 $z=0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2},2\pi$,我们找出一个周期 π 内五个特殊的点,求出对应的 x 的值与函数 y 的值,见表 1-1.

表 1-1

x	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{6}$
$z=2x+\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$	0	1	0	-1	0

以表中每组 (x,y) 为坐标描点,如图 1-7 所示,在直角坐标系中比较精确地描出对应的五个关键点:$\left(-\frac{\pi}{6},0\right)$,$\left(\frac{\pi}{12},1\right)$,$\left(\frac{\pi}{3},0\right)$,$\left(\frac{7\pi}{12},-1\right)$,$\left(\frac{5\pi}{6},0\right)$.

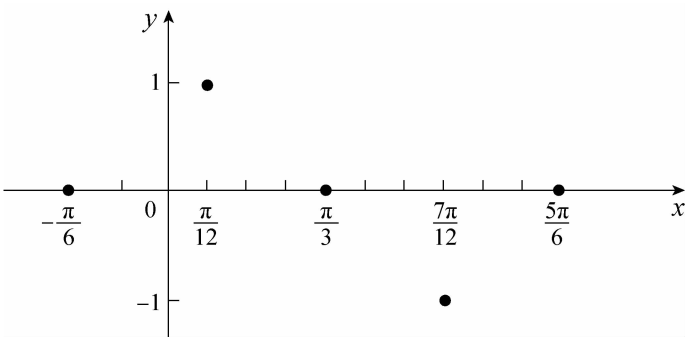


图 1-7

用光滑的曲线连接各点，得到函数 $y=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$ 在一个周期内的图像，如图 1-8 所示.

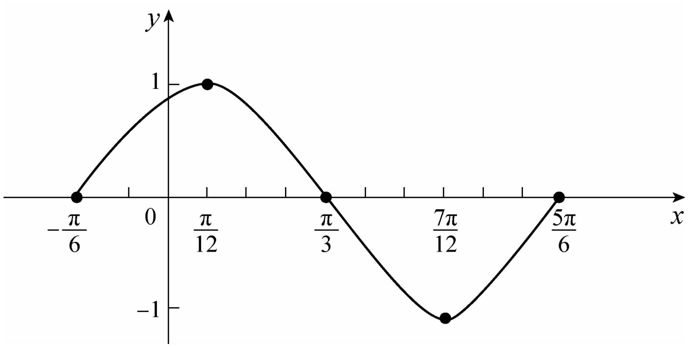


图 1-8

一般地，正弦型曲线 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$ 可以看作是由正弦曲线 $y=\sin x$ 通过下面的方法得到：首先将正弦曲线上的所有点的坐标缩短（当 $\omega>1$ 时）或伸长（当 $\omega<1$ 时）到原来的 $\frac{1}{\omega}$ 倍（纵坐标不变）；然后将所得到的曲线向左（当 $\varphi>0$ 时）或向右（当 $\varphi<0$ 时）平行移动 $\left|\frac{\varphi}{\omega}\right|$ 个单位；最后把所得曲线上所有点的纵坐标伸长（当 $A>1$ 时）或缩短（当 $0<A<1$ 时）到原来的 A 倍（横坐标不变）. 因此，在作正弦型函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$ 的图像时，可令 $z=\omega x+\varphi$，然后利用上面的方法，即求得一个周期内的正弦型曲线的五个关键点的坐标，依次为

$$\left(-\frac{\varphi}{\omega},0\right),\left(-\frac{\varphi}{\omega}+\frac{T}{4},A\right),\left(-\frac{\varphi}{\omega}+\frac{T}{2},0\right),$$

$$\left(-\frac{\varphi}{\omega}+\frac{3T}{4},-A\right),\left(-\frac{\varphi}{\omega}+T,0\right),$$

其中 T 为函数的周期.

例 5 利用"五点法"作出函数 $y=2\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{6}\right)$ 在一个周期内的图像，并指出曲线是由正弦曲线经过怎样的步骤得到的.

解 这里 $\omega=\frac{1}{2}$，$\varphi=\frac{\pi}{6}$，故函数 $y=2\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的周期为

$$T=\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi,$$

且 $-\frac{\varphi}{\omega}=-\frac{\frac{\pi}{6}}{\frac{1}{2}}=-\frac{\pi}{3}$，所以五个关键点的坐标分别为

$$\left(-\frac{\pi}{3},0\right),\left(\frac{2\pi}{3},2\right),\left(\frac{5\pi}{3},0\right),\left(\frac{8\pi}{3},-2\right),\left(\frac{11\pi}{3},0\right).$$

描出这五个关键点，然后用光滑的曲线连接各点，即得到函数 $y=2\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{6}\right)$ 在一个周期内的图像，如图 1-9 所示.

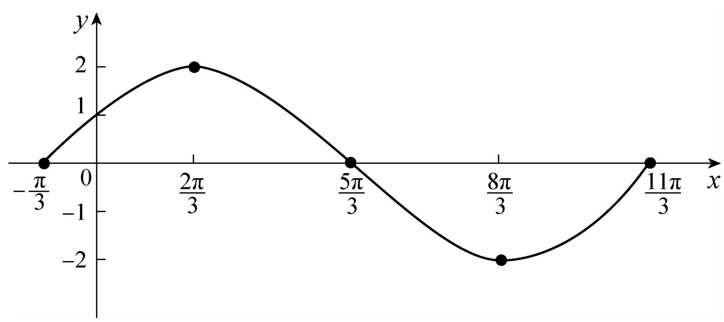


图 1-9

函数 $y=2\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{6}\right)$ 可以看作由下列的方法得到：首先将正弦曲线 $y=\sin x$ 上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍（纵坐标不变）；然后把所得的曲线向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位；最后把所得曲线上的所有点的纵坐标伸长到原来的 2 倍（横坐标不变）.

做一做

利用“五点法”作出下列函数在一个周期内的图像，并指出曲线是由正弦曲线经过怎样的步骤获得的.

(1) $y=4\sin\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)$；

(2) $y=3\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$.

1.4.3 正弦型函数的应用

在电学中，电流强度的大小和方向都随时间变化的电流称为**交变电流**，简称**交流电**. 最简单的是简谐交流电，其电流强度的大小和方向随时间而变化，可以用如下函数来表示：

$$I=I_m\sin(\omega t+\varphi_0)(I_m>0,\omega>0,-\pi\leqslant\varphi_0\leqslant\pi),$$

其中，I_m 是电流强度的最大值，称为简谐交流电的**峰值**；ω 称为**角频率**，单位为 rad/s；$\omega t+\varphi_0$ 称为**相位**，φ_0 称为**初相位**，简称初相；$T=\dfrac{2\pi}{\omega}$ 称为简谐交流电的**变化周期**，表示交流电完成一次周期性变化所需要的时间，单位为 s；单位时间内，交流电完成周期性变化的次数称为**频率**，用 f 表示，$f=\dfrac{1}{T}$，单位为 Hz(赫兹).

峰值、频率和初相位是简谐交流电的三要素，它们从不同的方面描述了简谐交流电的物理特征.

在物理学中，用 $s=A\sin(\omega t+\varphi_0)(t\in[0+\infty),A>0,\omega>0)$ 表示简谐振动，其中 t 表示振动的时间，s 表示位移，A 表示振动时离开平衡位置的最大距离，通常将 A 称为**振幅**，故函数的最大值 $s_{\max}=A$，最小值 $s_{\min}=-A$，$T=\dfrac{2\pi}{\omega}$ 称为简谐振动的**变化周期**，$f=\dfrac{1}{T}$ 称为简谐振动的**变化频率**，$\omega t+\varphi_0$ 称为**相位**，φ_0 称为**初相位**.

一般地，正弦型函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi_0)(A>0,\omega>0)$ 中，A 称为**振幅**(或峰值)，ω 称为**角频率**，φ_0 称为**初相位**.

例 6 已知简谐交流电的电流强度随时间 t 的变化规律为 $I=26\sin\left(100\pi t+\frac{\pi}{3}\right)$，求出它的峰值、周期、初相位和频率.

解 峰值 $I_m=26$ A；

周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{100\pi}=0.02$ s；

初相位 $\varphi_0=\frac{\pi}{3}$；

频率 $f=\frac{1}{T}=\frac{1}{0.02}=50$ Hz.

例 7 已知简谐交流电的电流强度 I(单位:A) 随时间 t(单位:s) 变化的部分曲线如图 1-10 所示，试写出 I 与 t 的函数关系.

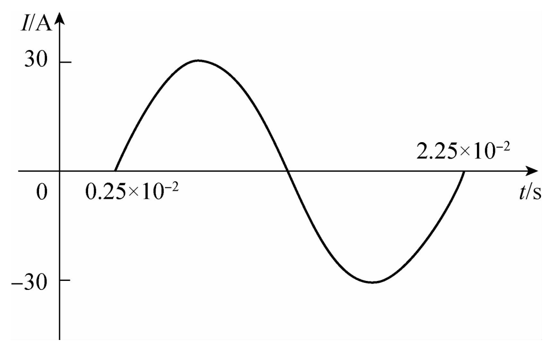


图 1-10

解 电流强度 I 随时间 t 的变化满足正弦型函数关系，故设所求的函数关系式为

$$I=I_m\sin(\omega t+\varphi_0).$$

由图 1-10 可知，峰值 $I_m=30$ A，周期为 $T=2.25\times10^{-2}-0.25\times10^{-2}=2\times10^{-2}$，于是由 $T=\frac{2\pi}{\omega}=2\times10^{-2}$ 得 $\omega=100\pi$.

又由图 1-10 可知，点 $(0.25\times10^{-2},0)$ 满足函数关系式，因此将其代入函数关系式得

$$0=30\sin(0.25\times10^{-2}\omega+\varphi_0),$$

化简得 $0=0.25\times10^{-2}\omega+\varphi_0$，即得

$$\varphi_0=-0.25\times10^{-2}\omega=-0.25\times10^{-2}\times100\pi=-\frac{\pi}{4}.$$

因此，所求的函数关系式为 $I=30\sin\left(100\pi t-\frac{\pi}{4}\right)$.

做一做

指出下列正弦型函数的振幅、角频率和初相位：

（1）$y=4\sin\left(\frac{1}{3}x+\frac{\pi}{4}\right)$；

（2）$y=7\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)$.

习题 1.4

1. 指出下列函数的周期、最大值和最小值，并指出当 x 为何值时函数取得最值：

（1）$y=2\sin\left(\frac{1}{3}x+\frac{\pi}{3}\right)$；（2）$y=8\sin\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)$；

（3）$y=\sin\left(4\pi x+\frac{\pi}{5}\right)$； （4）$y=\sin 3x+\cos 3x$.

2. 用“五点法”画出正弦型函数 $y=\frac{1}{3}\sin\left(4x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的图像，并指出曲线是由正弦曲线经过怎样的步骤得到的.

3. 已知正弦型函数在一个周期内的图像如图 1-11 所示，试写出函数的解析式.

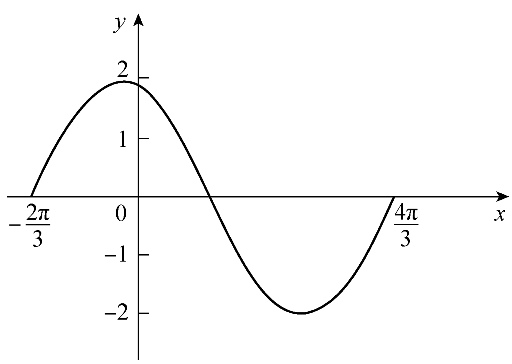


图 1-11

4. 求出简谐交流电 $I=220\sin\left(20\pi t+\frac{\pi}{8}\right)$ 的峰值、周期、初相位和频率.

1.5 正弦定理与余弦定理

在计算卫星的角度和高度，测量河流两岸码头之间的距离，确定待建隧道的长度时，我们都离不开三角形的边角关系，本节将学习正弦定理和余弦定理来求解三角形，以及解决实际测量中的一些问题.

1.5.1 正弦定理

如图 1-12 所示，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$BC=a$，$AC=b$，$AB=c$，由

$$\sin A=\frac{a}{c},\sin B=\frac{b}{c},\sin C=1,$$

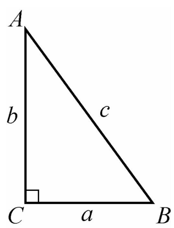


图 1-12

则得

$$c=\frac{a}{\sin A},c=\frac{b}{\sin B},c=\frac{c}{\sin C},$$

所以

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

根据直角三角形的面积公式得

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}ab\sin C,$$

由$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$可得

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}bc\sin A.$$

那么，在任意三角形中，是否也存在类似的数量关系呢？

如图 1-13 所示，在锐角三角形 ABC 中，作 $CD\perp AB$，则 $CD=b\sin A$，$CD=a\sin B$，于是 $b\sin A=a\sin B$，即

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}.$$

同理，过三角形的顶点 B 作 AC 的垂直线，可得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，因此

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

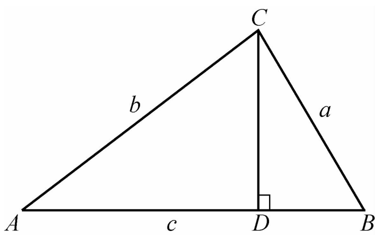


图 1-13

由于 $CD=b\sin A=a\sin B$，所以

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times AB\times CD=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B,$$

同理可得 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C$.

如图 1-14 所示，在钝角三角形 ABC 中，设 $\angle C$ 为钝角，作 $BD\perp AC$ 延长线于 D，则 $BD=c\sin A$，$BD=a\sin(180^\circ-C)=a\sin C$. 同样可以得到

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

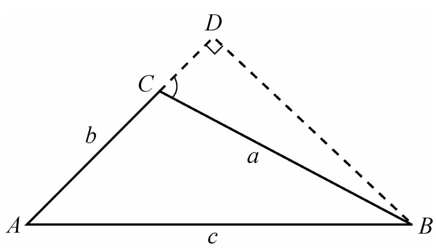


图 1-14

由于 $BD=c\sin A=a\sin C$，所以

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times AC\times BD=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ab\sin C,$$

同理可得 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B$.

这就是说，对于任意一个三角形，$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$

均成立,因此我们得到下面的正弦定理.

正弦定理:在任意一个三角形中,各边与它所对的角的正弦之比相等,即

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}. \qquad (1\text{-}14)$$

同时,我们也得到了计算三角形面积的另一种表达形式:

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C. \quad (1\text{-}15)$$

利用正弦定理可以解决下列两类解三角形的问题:

(1) 已知三角形的两个角和任意一边,求其他两边和另一个角.

(2) 已知三角形的两边和其中一边所对角,求其他两角和另一条边.

注 意

已知三角形的两边和其中一边的对角,利用正弦定理求另一边的对角时,要讨论这个角的取值范围,避免发生错误.

例 1 在 $\triangle ABC$ 中,已知 $b=20$,$\angle A=45^\circ$,$\angle B=120^\circ$,求 a.

解 根据正弦定理有$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$,所以

$$a=\frac{b\sin A}{\sin B}=\frac{20\sin 45^\circ}{\sin 120^\circ}=\frac{20\sqrt{6}}{3}.$$

例 2 已知在 $\triangle ABC$ 中,$\angle A=30^\circ$,$a=15\sqrt{2}$,$b=30$,求 $\angle B$.

解 根据正弦定理有$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$,所以

$$\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{30\sin 30^\circ}{15\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

再由 $b>a$ 知 $\angle B>\angle A$,故 $30^\circ<\angle B<180^\circ$,所以 $\angle B=45^\circ$ 或 $\angle B=135^\circ$.

例 3 在 $\triangle ABC$ 中,已知 $\angle B=60^\circ$,$\angle C=15^\circ$,$a=\sqrt{3}+1$,求 b,c,$S_{\triangle ABC}$ 的值.

解 由三角形的内角和为 180° 可知 $\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$,则

$$\angle A=180^\circ-\angle B-\angle C=180^\circ-60^\circ-15^\circ=105^\circ.$$

根据正弦定理$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$可得

$$b=\frac{a\sin B}{\sin A}=\frac{(\sqrt{3}+1)\sin 60^\circ}{\sin 105^\circ}=\sqrt{6};$$

$$c=\frac{a\sin C}{\sin A}=\frac{(\sqrt{3}+1)\sin 15^\circ}{\sin 105^\circ}=\sqrt{3}-1,$$

所以三角形的面积为

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times(\sqrt{3}+1)\times(\sqrt{3}-1)\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

> **注　意**
>
> 如无特殊说明：本单元中出现的 a,b,c 均为 $\triangle ABC$ 中 $\angle A,\angle B,\angle C$ 的对边.

例 4　在$\triangle ABC$ 中，已知 $\tan A:\tan B=a^2:b^2$，试判断$\triangle ABC$ 的形状.

解　根据三角函数定义和正弦定理.

$\tan A:\tan B=a^2:b^2$ 可以变形为

$$\frac{\sin A}{\cos A}\cdot\frac{\cos B}{\sin B}=\frac{\sin^2 A}{\sin^2 B}$$

因为 A,B 均为$\triangle ABC$ 的内角，故 $\sin A\neq 0,\sin B\neq 0$.于是，上式可化简为

$$\sin A\cdot\cos A=\sin B\cdot\cos B.$$

由二倍角公式得

$$\frac{1}{2}\sin 2A=\frac{1}{2}\sin 2B.$$

即

$$\sin 2A=\sin 2B.$$

因此 $2A=2B$ 或 $2A+2B=\pi$.

即

$$A=B\text{ 或 }A+B=\frac{\pi}{2}.$$

因此 $\triangle ABC$ 为等腰三角形或直角三角形.

做一做

在 $\triangle ABC$ 中，已知下列条件，解三角形.

(1) $\angle A=45^\circ,\angle B=30^\circ,b=\sqrt{3}$;

(2) $\angle B=30^\circ,b=2\sqrt{2},c=4$.

1.5.2 余弦定理

正弦定理揭示了任意三角形中边与角的一种数量关系，揭示任意三角形中边与角的数量关系的另一个重要结论是余弦定理.

如图 1-15 所示，以点 A 为原点建立平面直角坐标系，设 $\triangle ABC$ 是任意三角形，$AB=c$，$AC=b$，$BC=a$，则点 B 的坐标为$(c\cos A, c\sin A)$，点 C 的坐标为$(b,0)$. 根据两点间的距离公式得

$$a=|BC|=\sqrt{(b-c\cos A)^2+(0-c\sin A)^2},$$

两边平方得

$$\begin{aligned}a^2&=(b-c\cos A)^2+(0-c\sin A)^2\\&=b^2-2bc\cos A+c^2\cos^2 A+c^2\sin^2 A\\&=b^2-2bc\cos A+c^2(\cos^2 A+\sin^2 A)\\&=b^2+c^2-2bc\cos A,\end{aligned}$$

即得

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A.$$

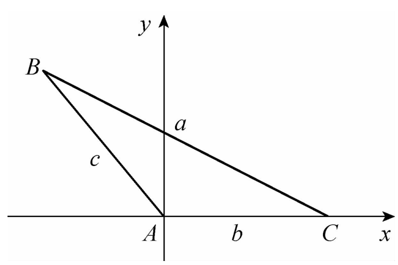


图 1-15

同理可得

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B,$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.$$

可以证明，上述结论对任意三角形都成立，于是得到下面的余弦定理.

余弦定理：三角形中任意一边的平方等于其余两边的平方和减去这两边与其夹角余弦乘积的 2 倍，即

议一议

试用同样的方法证明其他两式.

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A, \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B, \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C. \end{cases} \tag{1-16}$$

显然，当 $\angle C = 90^\circ$ 时，有 $c^2 = a^2 + b^2$，这就是说勾股定理是余弦定理的特例.

式(1-16)中的三个式子还可以分别变形为

$$\begin{cases} \cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \\ \cos B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \\ \cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}. \end{cases} \tag{1-17}$$

理论上利用余弦定理可以解决下列问题：

(1) 已知三角形的两条边和它们的夹角，求第三边和其他的两个角；

(2) 已知三角形的三条边，求三个角.

例 5 已知在 $\triangle ABC$，$\angle B = 60^\circ$，$a = 6$，$c = 8$，求 b 的值.

解 由式(1-16)可得

$$\begin{aligned} b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos B \\ &= 6^2 + 8^2 - 2 \times 6 \times 8 \times \cos 60^\circ \\ &= 100 - 48 = 52, \end{aligned}$$

所以 $b = 2\sqrt{13}$.

例 6 在 $\triangle ABC$ 中，$a = 6$，$b = 7$，$c = 10$，解三角形(精确到 1°).

解 由式(1-17)可得

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{7^2 + 10^2 - 6^2}{2 \times 7 \times 10} \approx 0.8071,$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{6^2 + 10^2 - 7^2}{2 \times 6 \times 10} = 0.725,$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{6^2 + 7^2 - 10^2}{2 \times 6 \times 7} \approx -0.1786,$$

所以 $\angle A \approx 36^\circ$，$\angle B \approx 44^\circ$，$\angle C \approx 100^\circ$.

做一做

1. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $a=3$，$b=2$，$\angle C=150^\circ$，求 c 的值.

2. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $a=20$，$b=29$，$c=21$，求 $\angle B$ 的度数.

1.5.3　正弦定理与余弦定理的应用

通过学习正弦定理和余弦定理，我们可以应用这些三角函数的知识来解决一些实际问题，比如计算高度、长度、距离和角的大小等.

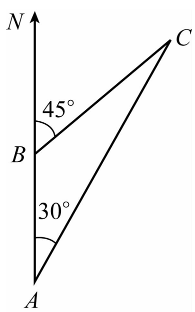


图 1-16

例 7　一艘船以每小时 36 海里的速度向正北方向航行，在 A 处观察到灯塔 C 在船的北偏东 30° 方向，0.5 小时后船行驶到 B 处，此时灯塔 C 在船的北偏东 45° 方向，如图 1-16 所示，求 B 处到灯塔 C 的距离.

解　因为 $\angle NBC=45^\circ$，$\angle A=30^\circ$，所以 $\angle C=15^\circ$，由题意知

$$AB=36\times 0.5=18(\text{海里}),$$

由正弦定理得

$$BC=\frac{AB\cdot\sin A}{\sin C}=\frac{18\sin 30^\circ}{\sin 15^\circ}\approx 34.8(\text{海里}).$$

所以 B 处到灯塔 C 的距离约为 34.8 海里.

例 8　如图 1-17 所示，设 A，B 两点在河的两岸，现需要测量两点间的距离. 测量者在与点 A 同侧的岸上选定了一点 C，并测量出 A，C 之间的距离为 45 m，又测出 $\angle BAC=45^\circ$，$\angle ACB=75^\circ$. 根据以上的信息，求出 A，B 两点的距离（精确到 0.1 m）.

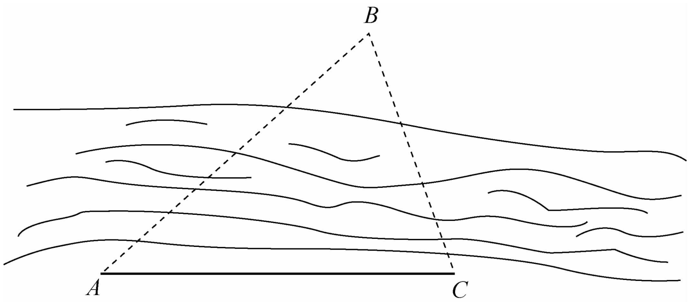


图 1-17

解 首先根据三角形的内角和为 $180°$，可以得到

$$\angle ABC = 180° - \angle ACB - \angle BAC = 60°.$$

利用两角和的正弦公式得出

$$\sin 75° = \sin(30° + 45°) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

在 $\triangle ABC$ 中，利用正弦定理可得

$$\frac{AB}{\sin \angle ACB} = \frac{AC}{\sin \angle ABC},$$

于是

$$AB = \frac{AC\sin \angle ACB}{\sin \angle ABC} = \frac{45\sin 75°}{\sin 60°} = \frac{45 \times \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \approx 50.2\ \text{m}.$$

所以 A，B 两点的距离约为 50.2 m.

例 9 修筑道路需挖掘隧道，在山的两侧是隧道口 A 和 B，在平地上选择合适测量的点 C，如图 1-18 所示. 如果已知 $\angle C = 60°$，$AC = 350$ m，$BC = 450$ m，试计算隧道 AB 的长度(精确到 1 m).

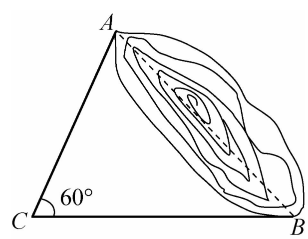


图 1-18

解 在 $\triangle ABC$ 中，利用余弦定理可得

$$\begin{aligned} AB^2 &= AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos \angle C \\ &= 350^2 + 450^2 - 2 \times 350 \times 450 \times \cos 60° \\ &= 167\ 500. \end{aligned}$$

则得 $AB = \sqrt{167\ 500} \approx 409$ (m).

所以隧道 AB 的长度约为 409 m.

做一做

请计算引例中海岛的高度.

注　意

在求解三角形问题时,其过程可用以下流程图表示.

实际问题
↓ 抽象概括
解三角形问题
↓ 推理演算
三角形问题的解
↓
实际问题的解

习题 1.5

1. 填空题.

(1) 在 $\triangle ABC$ 中, $\sin A : \sin C = 2 : \sqrt{3}$, $a = 2\sqrt{3}$, 则 $c =$ ________.

(2) 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 1$, $BC = 2$, $\angle B = 60^\circ$, 则 $AC =$ ________.

(3) 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $a + b = \sqrt{c^2 + 3ab}$, 则 $\cos C =$ ________, $\angle C =$ ________.

(4) 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ 所对的边分别为 a, b, c, 若已知 $a = 1$, $c = \sqrt{3}$, $\angle C = \frac{\pi}{3}$, 则 $\angle A =$ ________.

2. 在 $\triangle ABC$ 中, $a = 6$, $b = 6\sqrt{3}$, $\angle A = 30^\circ$, 求 c 的值.

3. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 45^\circ$, $a = 12$, 求 b, c 的值.

4. 如图 1-19 所示, A, B 两地相距 308 km, 飞机从 A 地飞往 B 地, 因风向关系使得飞机偏离航线 6°, 飞行115 km 到达 C 地, 求此时飞机从 C 地到 B 地的距离, 以及其航向与 CB 方向的偏角 α.

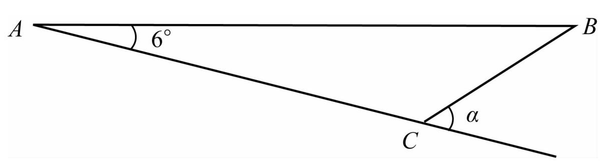


图 1-19

5. 某渔船在 A 处测得北偏东 45° 的 C 处有一鱼群, 距离渔船 12 海里, 并发现鱼群正沿南偏东 75° 的方向, 以每小时 10 海里的速度游去, 渔船立即以每小时 14 海里的速度沿直线方向追捕, 问渔船多长时间才可以追上鱼群?

6. 在$\triangle ABC$中，已知下列条件，求三角形的面积S(精确到0.01 cm^2).

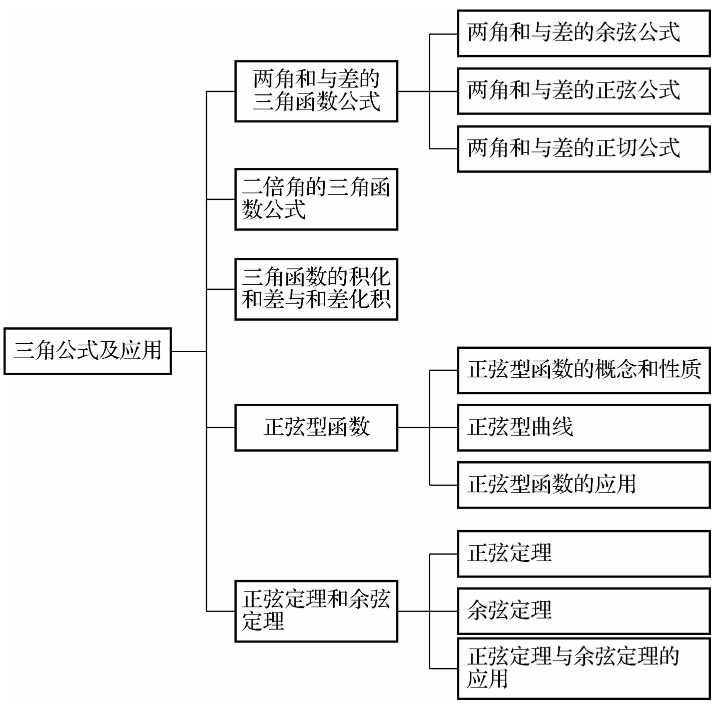
(1) 已知$a=14.8$ cm，$c=23.5$ cm，$\angle b=148.5°$；

(2) 已知$a=36$ cm，$\angle A=32.8°$，$\angle c=66.5°$；

(3) 已知$a=41.4$ cm，$b=27.3$ cm，$c=38.7$ cm.

单元小结

一、知识脉络图



二、主要内容

1. 两角和与差的余弦公式与正弦公式

本节主要介绍了两角和与差的一些重要公式，现总结如下.

项目名称	公　式
两角和的余弦公式	$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$
两角差的余弦公式	$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$
两角和的正弦公式	$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$
两角差的正弦公式	$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$
两角和的正切公式	$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$
两角差的正切公式	$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

2. 二倍角的正弦、余弦和正切公式

本节主要介绍了二倍角的一些重要公式，现总结如下.

项目名称	公　式
二倍角的余弦公式	$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$ $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$ $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$
二倍角的正弦公式	$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$
二倍角余弦公式的变形公式	$\cos^2\alpha=\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$ $\sin^2\alpha=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$
二倍角的正切公式	$\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

3. 三角函数的积化和差与和差化积

(1) 积化和差公式.

$$\begin{cases}\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)],\\ \cos\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)],\\ \cos\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)],\\ \sin\alpha\sin\beta=-\dfrac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)].\end{cases}$$

(2) 和差化积公式.

$$\begin{cases}\sin\theta+\sin\varphi=2\sin\dfrac{\theta+\varphi}{2}\cos\dfrac{\theta-\varphi}{2}\\ \sin\theta-\sin\varphi=2\cos\dfrac{\theta+\varphi}{2}\sin\dfrac{\theta-\varphi}{2}\\ \cos\theta+\cos\varphi=2\cos\dfrac{\theta+\varphi}{2}\cos\dfrac{\theta-\varphi}{2}\\ \cos\theta-\cos\varphi=-2\sin\dfrac{\theta+\varphi}{2}\sin\dfrac{\theta-\varphi}{2}\end{cases}$$

4. 正弦型函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$

(1) 形如 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$ 的函数称为正弦型函数.

(2) 正弦型函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$ 的性质.

① 定义域为 **R**.

② 周期为 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$.

③ 值域为$[-A,A]$,即最大值为 A,最小值为 $-A$.

(3) 正弦型函数的图像称为正弦型曲线.

(4) 用“五点法”,即 $\left(-\dfrac{\varphi}{\omega},0\right)$、$\left(-\dfrac{\varphi}{\omega}+\dfrac{T}{4},A\right)$、$\left(-\dfrac{\varphi}{\omega}+\dfrac{T}{2},0\right)$、$\left(-\dfrac{\varphi}{\omega}+\dfrac{3}{4}T,-A\right)$、$\left(-\dfrac{\varphi}{\omega}+T,0\right)$五个关键点可作出正弦型函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$ 的图像.

(5) 在电学中,电流强度的大小和方向都随时间变化的电流称为交变电流,简称交流电.

(6) 最简单的是简谐交流电,其电流强度的大小和方向随时间而变化,可以用如下函数来表示:

$I=I_m\sin(\omega t+\varphi_0)(I_m>0,\omega>0,-\pi\leqslant\varphi_0\leqslant\pi)$,

其中 I_m 是电流强度的最大值,称为简谐交流电的峰值;ω 称为角频率,单位为 rad/s;$\omega t+\varphi_0$ 称为相位,φ_0 称为初相位,简称初相;$T=\dfrac{2\pi}{\omega}$ 称为简谐交流电的变化周期,表示交流电完成

一次周期性变化所需要的时间，单位为 s；单位时间内，交流电完成周期性变化的次数称为频率，用 f 表示，$f=\frac{1}{T}$，单位为 Hz（赫兹）.

（7）一般地，正弦型函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi_0)(A>0,\omega>0)$ 中，A 称为振幅（或峰值），ω 称为角频率，φ_0 称为初相位.

5. 正弦定理与余弦定理

（1）正弦定理：在任意一个三角形中，各边与它所对的角的正弦之比相等，即

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

（2）余弦定理：三角形中任意一边的平方等于其余两边的平方和减去这两边与其夹角余弦乘积的 2 倍，即

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,$$
$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B,$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.$$

（3）余弦定理的变式.

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},$$
$$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac},$$
$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

复习题1

A 组

1. 选择题.

（1）$\sin(\theta+\varphi)-\sin(\theta-\varphi)=$（　　）.

A. $\sin\theta\cos\varphi$　　B. $\cos\theta\sin\varphi$

C. $2\sin\theta\cos\varphi$　　D. $2\cos\theta\sin\varphi$

(2) 已知 $3\sin^2\alpha+5\sin\alpha-2=0$，则 $\cos 2\alpha=$（　　）.

A. $\frac{7}{9}$　　B. $-\frac{7}{9}$

C. $-\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{3}$

(3) 如果 α 是锐角，则 $\sin\alpha\cos\alpha$ 的取值范围是（　　）.

A. $[1,\sqrt{2}]$　　B. $(1,\sqrt{2}]$

C. $\left[0,\frac{1}{2}\right]$　　D. $\left(0,\frac{1}{2}\right]$

(4) 当 x 为（　　）时，函数 $y=5\sin\left(4x+\frac{\pi}{4}\right)$ 取得最大值.

A. $\frac{\pi}{8}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$　　B. $-\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$

C. $\frac{\pi}{16}+\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$　　D. $-\frac{\pi}{16}+\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$

(5) 函数 $y=\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x$ 的最小值是（　　）.

A. 2　　B. $-\sqrt{3}$

C. 1　　D. -2

(6) 函数 $y=2\sin(5x-\frac{\pi}{4})$ 的频率和初相位分别是（　　）.

A. $\frac{2\pi}{5},-\frac{\pi}{4}$　　B. $\frac{5\pi}{2},-\frac{\pi}{4}$

C. $\frac{5\pi}{2},\frac{\pi}{4}$　　D. $\frac{5}{2\pi},-\frac{\pi}{4}$

(7) 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 在一个周期内的最高点的坐标为 $\left(\frac{\pi}{12},3\right)$，最低点的坐标为 $\left(\frac{7\pi}{12},-3\right)$，则 ω 和 φ 的值分别为（　　）.

A. $\frac{1}{2},\frac{\pi}{3}$　　B. $2,\frac{\pi}{6}$

C. $2,\frac{\pi}{3}$　　D. $1,\frac{\pi}{3}$

(8) $\sin 15° - \cos 15°$ 的值是(　　).

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{6}}{2}$　　D. $-\frac{\sqrt{6}}{2}$

(9) $\sin 15°\cos 30°\sin 75°$ 的值等于(　　).

A. $\frac{\sqrt{3}}{4}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{8}$

C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{1}{8}$

(10) 已知 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{2}{5}$,$\tan\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{4}$,则 $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=$(　　).

A. $\frac{3}{18}$　　B. $\frac{13}{18}$

C. $\frac{3}{22}$　　D. $\frac{13}{22}$

2. 填空题.

(1) $\sin 65°\sin 70° - \sin 25°\sin 20° =$ ________.

(2) 已知 θ 是第三象限的角,且 $\sin^4\theta+\cos^4\theta=\frac{5}{9}$,则 $\sin 2\theta=$ ________.

(3) 已知 $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\frac{1}{3}$,则 $\cos^2\alpha-\sin^2\beta=$ ________.

(4) 函数 $y=2\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)$的周期是________,振幅为________,当 $x=$ ________时,函数取得最大值;当 $x=$ ________时,函数取得最小值.

(5) 已知锐角 $\triangle ABC$ 的面积是 8,$AB=4$,$AC=5$,则 $BC=$ ________.

(6) 用“五点法”作图时,函数 $y=5\sin\left(4x-\frac{3\pi}{5}\right)$对应的五个关键点的坐标分别为________,________,________,

________，________.

(7) 在$\triangle ABC$，$a:b:c=5:6:7$，则$\cos A=$________.

3. 不用计算器，求下列各式的值：

(1) $\cos 40^\circ\sin 20^\circ+\sin 40^\circ\cos 20^\circ$；

(2) $\cos 55^\circ\cos(-10)^\circ-\sin 55^\circ\sin(-10^\circ)$；

(3) $16\sin\frac{\pi}{64}\cos\frac{\pi}{64}\cos\frac{\pi}{32}\cos\frac{\pi}{16}\cos\frac{\pi}{8}$；

(4) $\cos^2 165^\circ-\sin^2 165^\circ$；

(5) $\tan(-105^\circ)$.

4. 化简下列各式：

(1) $\sin(60^\circ+\alpha)-\sin(60^\circ-\alpha)$；

(2) $\cos(30^\circ+\beta)+\cos(30^\circ-\beta)$；

(3) $\sin(\beta-15^\circ)\cos(\beta+15^\circ)+\cos(\beta-15^\circ)\sin(\beta+15^\circ)$；

(4) $\cos(27^\circ+\alpha)\cos(33^\circ-\alpha)-\sin(27^\circ+\alpha)\sin(33^\circ-\alpha)$；

(5) $\tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$；

(6) $\tan 17^\circ+\tan 43^\circ+\sqrt{3}\tan 17^\circ\tan 43^\circ$.

5. 求下列函数的最大值、最小值和周期：

(1) $\sqrt{2}\sin x+\sqrt{2}\cos x$；　　(2) $y=\sin x-\sqrt{3}\cos x$.

6. 用“五点法”作下列函数的图像，并指出曲线是由正弦曲线经过怎样的步骤得到的.

(1) $y=2\sin\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)$；　(2) $y=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)$.

7. 在$\triangle ABC$中求解.

(1) 如果$\sin A+\cos A=\frac{2}{3}$，判断该三角形是锐角三角形还是钝角三角形；

(2) $a=10$，$\angle B=60^\circ$，$\angle C=45^\circ$，求b，c的值.

8. 已知$\sin\alpha=\frac{3}{5}$，$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，求$\sin 2\alpha$，$\cos\frac{\alpha}{2}$，$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$，$\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$，$\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$，$\tan 2\alpha$的值.

9. 已知$\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3}{5}$，求$\sin 2x$的值.

10. 如图 1-20 所示，有一个堤坝，原斜坡 AB 长 50 m，倾斜角 $\angle ABC=40°$，现要将斜坡的倾斜度改为 $25°$，即 $\angle D=25°$，那么斜坡的坡底要延长多少米？

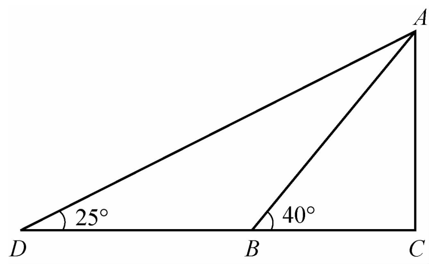


图 1-20

11. 已知灯塔 A 在灯塔 B 的南偏东 $75°$ 的方向，两个灯塔相距 20 海里，从轮船 C 上看见灯塔 B 在它的正西方向，看见灯塔 A 在它的正东南方向，求轮船离这两个灯塔的距离.

12. 如图 1-21 所示，已知 A，B 两点间有座小山，不能直接测量其距离. 在 D 点测得 $\angle ADB=150°$，由 D 点沿 AD 方向前进 100 m 到 C 点，测得 $\angle ACB=120°$，$AC=300$ m，试计算 A、B 两点间的距离.

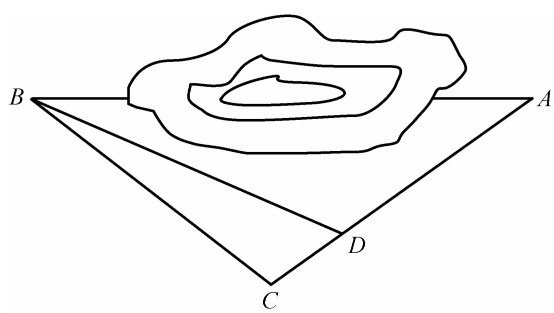


图 1-21

B 组

1. 已知 $\sin(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}$，$\sin(\alpha-\beta)=\frac{1}{3}$，求证 $\sin\alpha\cos\beta=5\cos\alpha\sin\beta$.

2. 已知函数 $y=\cos^2x-2\sin x\cos x-\sin^2x$，$x\in\mathbf{R}$.

(1) 求函数的最小正周期.

(2) 求函数的最小值及取得最小值时 x 的集合.

3. 如图 1-22 所示,在塔底 B 测得山顶 C 的仰角为 $60°$,在山顶 C 测得塔顶 A 的俯角为 $45°$,已知塔高 $AB=20$ m,求山高 DC(精确到 0.1 m).

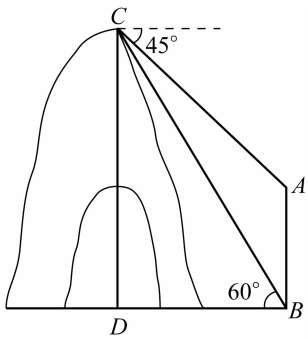


图 1-22

知识拓展

三角函数简史之角与弦

角的概念会产生歧义,因为它既描述了两条相交直线之间“分离”这个定性的概念,也描述了这种分离程度的数值(角的度量),而在两个点之间的“分离”上却没有这种歧义,因为线段和长度这两个概念能分得很清楚.好在我们不需要担心这种混淆,因为在三角学中,我们只关注线段与角的性质当中可以量化的部分.

三角学算是最古老的学科了,真要说起来,它的历史比平面几何还早,当然如果把早期的三角学计算也算作平面几何的一部分的话那就另当别论了.如今中学生接触三角学,是以直角三角形为基准,各边之比的定义得来的,然后到了高中就将三角函数定义放到圆和坐标系里,这一点倒是符合三角学的历史发展的,数学史上第一份三角学资料,也是拿来解直角三角形的.

1. 角度

平面上的运动只有两种——平移和旋转.平移的程度由

距离和面积来度量，而旋转的程度则由角度来度量，对长度的定义一直以来都没什么难度，确定一个单位长度标准就行了. 对角度的定义却没那么简单——角度描述两条相交直线之间的相离程度，到底多大程度才能定为一个标准？相对于距离来说，角度的大小更充满“定性”的味道. 好在巴比伦人利用了圆这一个标准——他们将圆从圆心分成了 360 份，要衡量一个角度大小，只需要将角度的顶点与圆心重合，算出对应的弧长占圆周长的百分数，就能够衡量这个角的大小了. 所以利用圆来衡量角度，大概是古人早已发现圆周角所对弧长与圆周角之间简单的比例关系. 圆与三角学的关系，从一开始就密不可分，往后也是. 至于巴比伦人为何将圆分为 360 份，具体原因已经不可考，但很明显，这与巴比伦人一贯使用的六十进制有很大关系. 其中有一个解释是，因为巴比伦人使用的是六十进制，所以实际上它们是将一个圆分成了六个进制，这样的一个好处就是分出来的每一份中对应的弦长与半径相等. 另一个解释就是 360 份恰与一年的天数很接近. 当然从未有任何证据说明这一点，一切都只是猜测，所以对于 360° 的规定的具体原因已经不得而知. 但这利用圆来衡量角度的方法很有效，一直流传至今. 不久之后，希腊人采用了这一套系统，托勒密在他的《至大论》中就使用了这一系统.

一直以来，六十进制作为一种计数法，早已被十进制淘汰，但作为角度和时间的度量却一直流传了下来，这种制度是如此受欢迎，即使是在“公制化的创始地”法国也无法被替代. 这倒是很有趣的现象.

到了近代，出现了另一种度量制度——弧度制，1 弧度就是圆上的弧长等于半径时所对的圆心角. 我们经常听说采用弧度制的原因是能够用较小的数字表示角. 实际上并非如此，采用弧度制的唯一原因是它能够简化许多公式，比如弧长公式将变成 $l=\alpha r$，扇形面积公式也将变得非常简单，弧度制的应用去除了这些公式中“多余”的因子$\frac{\pi}{180}$.

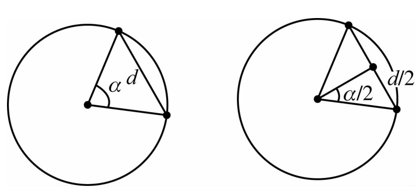
另一个事实是，弧度制的采用将使得这个事实成立：一个很小的角和它的正弦值在数值上是近似相等的，也就是 $\frac{\sin x}{x}$ 在 x 趋于零时其极限值为 1，这种近似若采用弧度制将使得在 x 不是很小的时候就变得非常接近. 因此使得弧度制在微积分学中变得非常重要.

2. 弦

三角学一开始和圆扯上了关系，然后就与角度所对的弦长扯上了关系. 在数学发展初期的巴比伦时期，人们就已经发现了三角形相似的性质，最后传到希腊，得到了进一步的应用. 人类历史上第一位数学家泰勒斯据此计算出了埃及金字塔的高度，可谓是一大奇闻. 现代意义上的“三角学”一词，说来还多亏了天文学，天文学的发展急需科学家求解各种各样的三角形，那时候自然还没有我们今日的什么正弦定理余弦定理可用. 有一位叫西巴尔卡斯的科学家在这方面迈出了重要一步：他将三角形置于圆中，这样三角形的边就变成了弦，为了计算三角形的各部分，就必须考察圆心角与弦长的关系. 这事情自此以后成为了各个数学家在这方面的研究重点.

第一本三角学著作出自托勒密之手，他编制出了第一套“正弦函数表”，当然当时并无正弦这一概念，这个表格继承了西巴尔卡斯的工作，列出了角度从 $0^\circ \sim 180^\circ$ 变化时，对应的弦长，托勒密取将圆的半径定为 60 单位长度，为了方便，我们就不谈六十进制了. 实际上相当于十进制中取 10 为半径，根据我们现在的认识，知道托勒密的表格实际上就是给出了一个 $\sin(\frac{\alpha}{2})$ 表。

$$d = 2r\sin(\frac{\alpha}{2}) = 20\sin(\frac{\alpha}{2}),$$



今天我们可以看到一个有趣的现象，在圆心角 α 与弦长 d 之间的关系中，我们需要先把圆心角除以 2，最后的结果还要乘以 20，这实际上是一个重复的过程，重复做这样的工作只是在浪费时间而已．几百年以后，终于有人将此表简化，不再考虑圆心角与弦长的关系，而是考察“弦长的一半”与“圆心角的一半”之间的关系．我们可以看出，这一看起来简单地简化其实是一次伟大的进步 —— 本来只是等腰三角形的顶角与底边的关系，现在变成了直角三角形一锐角与对边的关系．如果我们注意到“圆周角是圆心角的一半”这个结论，实际上这一进步已经在孕育着正弦定理．往后三角学慢慢脱离圆的束缚，转向了以直角三角形为基础，我们今天熟知的正弦余弦之类的定义由此变得清晰起来．