计算机数学基础配套辅导

JISUANJI SHUXUE JICHU PEITAO FUDAO

主编　孙海青
闫艳花
李艳宁

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

计算机数学基础配套辅导

主编　孙海青　闫艳花　李艳宁

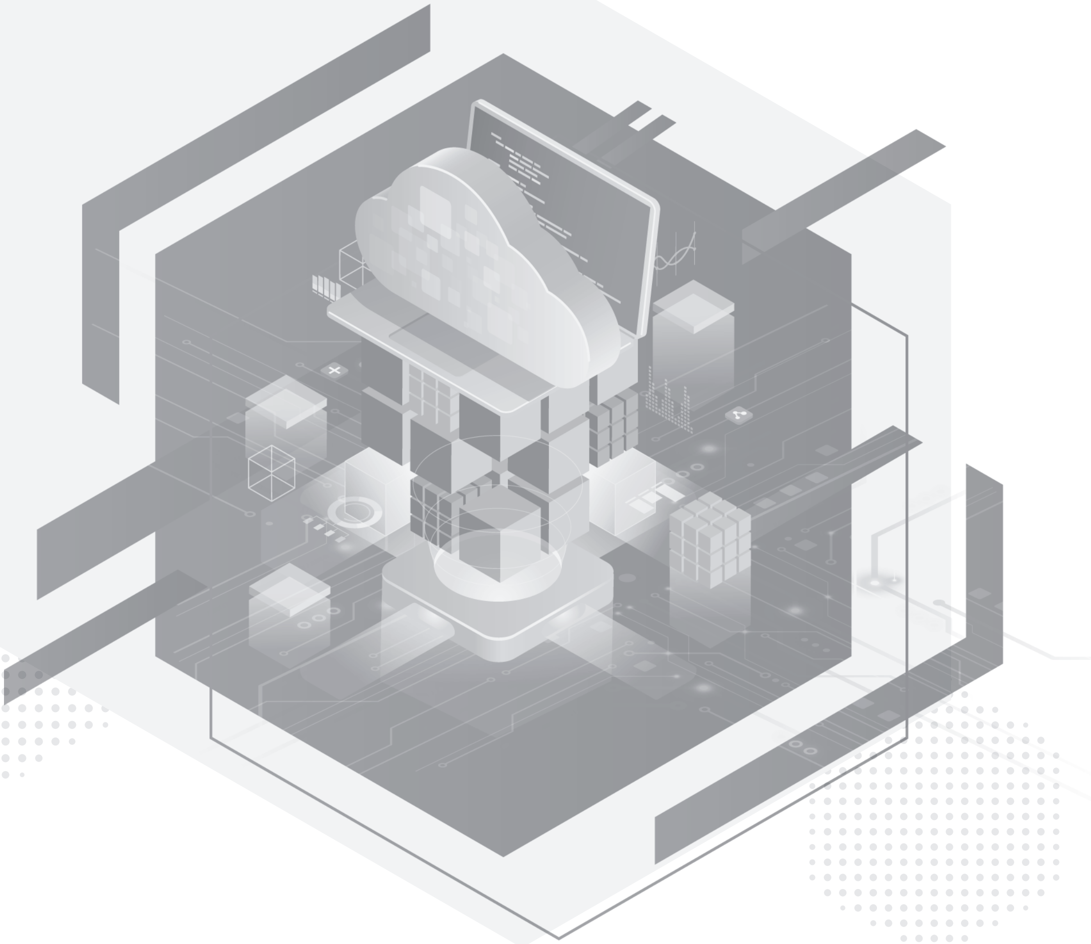
北京邮电大学出版社

计算机数学基础
配套辅导

策划编辑：金颖杰
责任编辑：高　宇
封面设计：张瑞阳

ISBN 978-7-5635-6910-6

定价：29.80元



计算机数学基础配套辅导

主　编　孙海青　闫艳花　李艳宁

副主编　张远镇　孟宪杰　纪张伟

北京邮电大学出版社
www. buptpress. com

内 容 简 介

本书是主教材《计算机数学基础》的配套辅导用书.本书共7章,内容包括一元函数微分学、定积分与不定积分、线性代数初步、概率论基础、随机变量和数字特征、数理逻辑初步、图论基础.

本书适合作为高等职业院校计算机和通信类相关专业数学课程的辅导用书.

图书在版编目(CIP)数据

计算机数学基础配套辅导 / 孙海青,闫艳花,李艳宁主编. -- 北京:北京邮电大学出版社,2023.5
ISBN 978-7-5635-6910-6

Ⅰ.①计… Ⅱ.①孙… ②闫… ③李… Ⅲ.①电子计算机—数学基础 Ⅳ.①TP301.6

中国国家版本馆CIP数据核字(2023)第077332号

策划编辑: 金颖杰　　**责任编辑:** 高　宇　　**封面设计:** 张瑞阳

出版发行: 北京邮电大学出版社
社　　址: 北京市海淀区西土城路10号
邮政编码: 100876
发 行 部: 电话:010-62282185　传真:010-62283578
E-mail: publish@bupt.edu.cn
经　　销: 各地新华书店
印　　刷: 大厂回族自治县聚鑫印刷有限责任公司
开　　本: 787 mm×1 092 mm　1/16
印　　张: 9
字　　数: 186千字
版　　次: 2023年5月第1版
印　　次: 2023年5月第1次印刷

ISBN 978-7-5635-6910-6　　定　价:29.80元

·如有印装质量问题,请与北京邮电大学出版社发行部联系·

服务电话:400-615-1233

前 言

PREFACE

学好数学离不开自己做习题，学生认真学习教材内容的同时，若能参考辅导教材做一些分析和比较，便能更好地理解基础知识，掌握常用的数学方法，达到触类旁通、举一反三的效果.

本书是主教材《计算机数学基础》的配套辅导用书. 本书共 7 章，内容包括一元函数微分学、定积分与不定积分、线性代数初步、概率论基础、随机变量和数字特征、数理逻辑初步、图论基础.

本书每章内容如下.

(1)“知识结构图”，使学生能尽快掌握本章的主要学习内容，同时起到复习、小结的作用.

(2)“典型例题分析”，根据主教材小节内容编写一些有代表性的题目，不仅给出详细的解答过程，更侧重于解题思路的分析，从而提高学生分析问题和解决问题的能力.

(3)“教材习题详解”，给出主教材中的习题解答全过程，以便学生学习时进行对照.

(4)“习题自测”，帮助学生更好地进行自我反馈. 习题自测的答案可通过扫描书中二维码查看.

本书由天津电子信息职业技术学院孙海青、闫艳花、李艳宁任主编，天津电子信息职业技术学院张远镇、孟宪杰，唐山职业技术学院纪张伟任副主编. 全书由孙海青设计、统稿.

由于编者水平有限，书中难免存在不妥之处，给出的解题方法也未必都是最优的，敬请广大读者批评指正.

编　者

目 录

CONTENTS

第 1 章

一元函数微分学

知识结构图

- 一元函数微分学
  - 函数
    - 两要素
      - 定义域
      - 函数关系
    - 性质
      - 单调性
      - 周期性
      - 奇偶性
      - 有界性
    - 函数分类
      - 基本初等函数
      - 复合函数
      - 分段函数
  - 极限
    - 概念
      - 自变量趋于无穷
      - 自变量趋于有限值
    - 运算
      - 无穷大无穷小
      - 四则运算
      - 两个重要极限公式
    - 连续
      - 定义三要素
      - 间断分类
      - 零点定理
  - 导数
    - 定义
    - 计算
      - 四则运算
      - 链式法则
      - 高阶导数
      - 微分
    - 极值
  - 级数
    - 常数项级数
    - 幂级数

1.1 集合与函数

一、典型例题分析

例 1 求函数 $y=\sqrt{2-x-x^2}+\frac{1}{x-3}$的定义域.

解 要使函数有意义,应满足$\begin{cases}2-x-x^2\geqslant 0\\x-3\neq 0\end{cases}$,即$\begin{cases}-2\leqslant x\leqslant 1\\x\neq 3\end{cases}$,函数定义域为$[-2,1]$.

例 2 设 $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x}{1+x}$,求 $f(x)$,$f[f(x)]$.

解 令 $u=\frac{1}{x}$,则 $x=\frac{1}{u}$,$f(u)=\frac{\frac{1}{u}}{1+\frac{1}{u}}=\frac{1}{u+1}$,所以

$$f(x)=\frac{1}{x+1},f[f(x)]=\frac{1}{f(x)+1}=\frac{1}{\frac{1}{x+1}+1}=\frac{x+1}{x+2}.$$

例 3 设 $f(x)=\begin{cases}2,|x|\leqslant 2\\0,|x|>2\end{cases}$,求 $f(f(x))$.

解 当$|x|\leqslant 2$时,$f(x)=2$,$f(f(x))=f(2)=2$,

当$|x|>2$时,$f(x)=0$,$f(f(x))=f(0)=2$,

所以当 $x\in(-\infty,+\infty)$时,均有 $f(f(x))=2$.

例 4 函数 $f(x)=\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}$与 $g(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-2}}$是否相同?

解 $f(x)$的定义域为$(-\infty,1]\cup(2,+\infty)$,$g(x)$的定义域为$(2,+\infty)$. 因为这两个函数的定义域不同,所以它们不相同.

例 5 指出函数 $y=\sin^3(e^{2x})$的复合结构.

解 设 $u=\sin(e^{2x})$,$v=e^{2x}$,$t=2x$,则函数 $y=\sin^3(e^{2x})$的复合结构为

$$y=u^3,u=\sin v,v=e^t,t=2x.$$

二、教材习题详解

1. 下列各题中的两个函数是否表示同一函数?为什么?

(1)$y=\frac{x^2-4}{x+2}$和 $y=x-2$;

(2)$y=\sin x$ 和 $y=\sqrt{1-\cos^2 x}$;

(3) $y=|x-1|$ 和 $y=\begin{cases}x-1, x\geqslant 1\\ 1-x, x<1\end{cases}$.

解　(1) $y=\dfrac{x^2-4}{x+2}$ 的定义域是 $(-\infty,-2)\cup(-2,+\infty)$，而 $y=x-2$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，两者定义域不同，因此不是同一函数.

(2) $y=\sqrt{1-\cos^2 x}=|\sin x|$，两个函数是不同函数.

(3) $y=|x-1|=\begin{cases}x-1, x\geqslant 1\\ 1-x, x<1\end{cases}$，两个函数是相同函数.

2. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\sqrt{1-x^2}$；

(2) $y=\dfrac{x}{x^2-x-2}$；

(3) $y=\dfrac{\sqrt{2+x}}{\ln(1-x)}$；

(4) $y=\arcsin\dfrac{x+1}{3}$.

解　(1) $1-x^2\geqslant 0$，即 $-1\leqslant x\leqslant 1$，定义域是 $[-1,1]$.

(2) $x^2-x-2\neq 0$，即 $x\neq 2, x\neq -1$，定义域是 $(-\infty,-1)\cup(-1,2)\cup(2,+\infty)$.

(3) $\begin{cases}2+x\geqslant 0\\ 1-x>0\\ 1-x\neq 1\end{cases}$，即 $\begin{cases}x\geqslant -2\\ x<1\\ x\neq 0\end{cases}$，定义域是 $[-2,0)\cup(0,1)$.

(4) $\left|\dfrac{x+1}{3}\right|\leqslant 1$，即 $-4\leqslant x\leqslant 2$，定义域是 $[-4,2]$.

3. 判断下列函数的奇偶性.

(1) $f(x)=(x^2+1)\cos x$；

(2) $f(x)=2^x-2^{-x}$；

(3) $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$；

(4) $f(x)=\dfrac{x\cos x}{x^2+1}$.

解　(1) 函数定义域为 $(-\infty,+\infty)$，且

$$f(-x)=(x^2+1)\cos(-x)=(x^2+1)\cos x=f(x),$$

原函数为偶函数.

(2) 函数定义域为 $(-\infty,+\infty)$，且

$$f(-x)=2^{-x}-2^x=-(2^x-2^{-x})=-f(x),$$

原函数为奇函数.

(3)函数定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,且

$$f(-x)=-x-\frac{1}{x}=-\left(x+\frac{1}{x}\right)=-f(x),$$

原函数为奇函数.

(4)函数定义域为$(-\infty,+\infty)$,且

$$f(-x)=-\frac{x\cos(-x)}{x^2+1}=-\frac{x\cos x}{x^2+1}=-f(x),$$

原函数为奇函数.

4. 指出下列复合函数的复合过程.

(1)$y=(1+2x)^8$;

(2)$y=\ln\tan x$;

(3)$y=\sin^5 x$;

(4)$y=\sqrt{\tan\frac{x}{3}}$;

(5)$y=e^{\sqrt{2x+1}}$;

(6)$y=\frac{1}{\sqrt{\ln(x^2+1)}}$.

解 (1)$y=u^8$,$u=1+2x$;

(2)$y=\ln u$,$u=\tan x$;

(3)$y=u^5$,$u=\sin x$;

(4)$y=\sqrt{u}$,$u=\tan v$,$v=\frac{x}{3}$;

(5)$y=e^u$,$u=\sqrt{v}$,$v=2x+1$;

(6)$y=\frac{1}{u}$,$u=\sqrt{v}$,$v=\ln w$,$w=x^2+1$.

5. 已知 $f(x)=\begin{cases}2^x, x\leqslant 0\\ x-1, x>0\end{cases}$,求 $f(-3)$,$f(3)$,$f(0)$.

解 $f(-3)=2^{-3}=\frac{1}{8}$,$f(3)=3-1=2$,$f(0)=2^0=1$.

三、习题自测

1. 选择题.

(1)下列与 $f(x)=2x$ 完全相同的函数是(　　).

A. $y=\ln e^{2x}$　　　　B. $y=e^{\ln 2x}$

C. $\sqrt{4x^2}$　　　　D. $\frac{4x^2}{2x}$

(2) $y=e^{2x}$ 的奇偶性为( ).

A. 奇函数　　B. 非奇非偶函数

C. 偶函数　　D. 不能确定

(3) $f(x)=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+x}}$ 的定义域为( ).

A. $x\in\mathbf{R}$, 但 $x\neq 0$　　B. $x\in\mathbf{R}$, 但 $x\neq -1$

C. $x\in\mathbf{R}$, 但 $x\neq -1, x\neq 0$　　D. $x\in\mathbf{R}$, 但 $x\neq -1, x\neq -2$

(4) 如果 $f(x-1)=x(x-1)$, 则 $f(x)=$( ).

A. $x(x+1)$　　B. $(x-1)(x+2)$

C. $x(x-1)$　　D. 不存在

(5) 设 $f(x)=\begin{cases}1, |x|\leqslant 1\\ 0, |x|>1\end{cases}$, 则 $f\{f[f(x)]\}=$( ).

A. 0　　B. 1

C. $\begin{cases}1, |x|\leqslant 1\\ 0, |x|>1\end{cases}$　　D. $\begin{cases}0, |x|\leqslant 1\\ 1, |x|>1\end{cases}$

(6) 函数 $y=\tan^2(e^{2x})$ 的复合过程是( ).

A. $y=\tan^2 u, u=e^{2x}$　　B. $y=\tan^2 u, u=e^v, v=2x$

C. $y=u^2, u=\tan v, v=e^{2x}$　　D. $y=u^2, u=\tan v, v=e^w, w=2x$

2. 填空题.

(1) $f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$, 则 $f(x+1)$ 的定义域是________.

(2) $f(x)=x^2-3x+2$, 则 $f(0)=$________, $f(1)=$________.

(3) $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$, 则 $f[f(x)]=$________.

(4) $f(x+1)=3x^2+2x+1$, 则 $f(x)=$________.

(5) $f(x)=3x-2$, 且 $f(a)=4$, 则 $a=$________.

3. 计算题.

(1) 指出函数 $y=\ln\arccos\dfrac{1}{x+1}$ 的复合过程.

(2)求 $y=\ln u, u=2-v, v=w^2, w=\sin x$ 的复合函数.

(3)设 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$,求 $f\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)$.

1.2　极限与连续

一、典型例题分析

例 1　求$\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\sin\dfrac{1}{x}$.

解　因为$\lim\limits_{x\to 0}x=0$，且$\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$，所以利用有界变量与无穷小的乘积仍为无穷小这一性质，有

$$\lim_{x\to 0}x\cdot\sin\frac{1}{x}=0.$$

例 2　求$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5}{5x+3}\cdot\sin\dfrac{2}{x}$.

解　$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5}{5x+3}\cdot\sin\dfrac{2}{x}=2\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5}{5x^2+3x}\cdot\dfrac{\sin\dfrac{2}{x}}{\dfrac{2}{x}}=\dfrac{6}{5}$.

例 3　求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{1+x}\right)^{2x}$.

解　$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{1+x}\right)^{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{1+x}\right)^{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{1+x}\right)^{(1+x)}\right]^{\frac{2x}{1+x}}=\mathrm{e}^2$.

例 4　讨论函数 $y=\begin{cases}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+1, x<0\\ 2, x=0\\ x+1, x>0\end{cases}$ 的连续性，若不连续，指出间断点类型.

解　$y=\begin{cases}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+1, x<0\\ 2, x=0\\ x+1, x>0\end{cases}$ 是分段函数，当 $x<0$ 及 $x>0$ 时是初等函数，故函数 y 在$(-\infty,0)$和$(0,+\infty)$内是连续函数.

当 $x=0$ 时，因为$\lim\limits_{x\to 0^+}y=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+1)=1$，$\lim\limits_{x\to 0^-}y=\lim\limits_{x\to 0^-}(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+1)=1$，即$\lim\limits_{x\to 0}y=1$，但 $y(0)=2$，因此函数 y 在 $x=0$ 处不连续，$x=0$ 是第一类间断点，且是可去间断点.

例 5　设函数 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{\frac{2}{x}}+1, x<0\\ \dfrac{a+x^2+x}{3+x}, x\geqslant 0\end{cases}$，确定 a 的值，使 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续.

解　$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(\mathrm{e}^{\frac{2}{x}}+1)=1$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{a+x^2+x}{3+x}=\dfrac{a}{3}$，

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=f(0)$，即$\dfrac{a}{3}=1$，$a=3$.

二、教材习题详解

1. 利用四则运算法则计算下列极限.

(1)$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+1}{x+2}$；

(2)$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x^2-5x+4}$；

(3)$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3}{x^3+2x}$；

(4)$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+x-2}{3x^2-4x+1}$.

解 (1)$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+1}{x+2}=\dfrac{\lim\limits_{x\to2}(x^2+1)}{\lim\limits_{x\to2}(x+2)}=\dfrac{5}{4}$；

(2)$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x^2-5x+4}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(x-4)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+1}{x-4}=-\dfrac{2}{3}$；

(3)$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3}{x^3+2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^3}}{1+\dfrac{2}{x^2}}=\dfrac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x^2}\right)}=0$；

(4)$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+x-2}{3x^2-4x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}}{3-\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{2}{3}$.

2. 利用两个重要极限公式计算下列极限.

(1)$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 4x}{x}$；

(2)$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin(x-1)}{x^2-1}$；

(3)$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{2x}$；

(4)$\lim\limits_{x\to0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}$.

解 (1)$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 4x}{x}=4\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 4x}{4x}=4$；

(2)$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin(x-1)}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin(x-1)}{(x+1)(x-1)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{x+1}\cdot\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin(x-1)}{(x-1)}=\dfrac{1}{2}$；

(3)$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}\cdot6}=\left\{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}\right\}^6=e^6$；

(4)$\lim\limits_{x\to0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}(1-2x)^{\left(-\frac{1}{2x}\right)\cdot(-2)}=\left\{\lim\limits_{x\to0}(1-2x)^{\left(-\frac{1}{2x}\right)}\right\}^{(-2)}=e^{-2}$.

3. 指出下列函数的间断点.

(1) $y=\dfrac{1}{x}$；

(2) $y=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$；

(3) $y=\begin{cases}2^x, x\geqslant 0\\ x, x<0\end{cases}$；

(4) $y=\begin{cases}\cos x, x>0\\ 0, x=0\\ x+1, x<0\end{cases}$.

解　(1) $x=0$ 是第二类间断点.

(2) $y=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\dfrac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(x-2)}$，

当 $x=1$ 时，$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{x-2}=-2$，故 $x=1$ 是第一类间断点，且是可去间断点，

当 $x=2$ 时，函数左、右极限都不存在，故 $x=2$ 是第二类间断点.

(3) $\lim\limits_{x\to 0^+}2^x=1$，$\lim\limits_{x\to 0^-}x=0$，函数左、右极限都存在但不相等，故 $x=0$ 是第一类间断点，且是跳跃间断点.

(4) $\lim\limits_{x\to 0^+}\cos x=1=\lim\limits_{x\to 0^-}(x+1)=1$，函数左、右极限都存在且相等，故 $x=0$ 是第一类间断点，且是可去间断点.

4. 设函数 $f(x)=\begin{cases}1-e^{-x}, x<0\\ a+x, x\geqslant 0\end{cases}$，试确定 a 值，使 $f(x)$ 在其定义域内连续.

解　因为函数在定义域内连续，所以有 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=a$，

又因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(a+x)=a$，$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(1-e^{-x})=0$，故 $a=0$.

5. 证明方程 $x^2+x=1$ 在区间 $(0,1)$ 内至少有一个实根.

证明　设 $f(x)=x^2+x-1$，显然 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，又 $f(0)=-1<0$，$f(1)=1>0$，由零点定理可知，在区间 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=0$，即

$$\xi^2+\xi-1=0,$$

所以方程 $x^2+x=1$ 在区间 $(0,1)$ 内至少有一个实根.

三、习题自测

1. 选择题.

(1) 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有定义是 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 有极限的(　　).

A. 无关条件　　　　B. 充分条件

C. 必要条件　　　　D. 充要条件

(2) $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$是$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在的(　　).

A. 无关条件　　　　B. 充分条件

C. 必要条件　　　　D. 充要条件

(3)设 a 是常数,且$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$,则函数 $f(x)$在 x_0 处(　　).

A. 可以有定义,也可以没有定义　　　　B. 一定有定义

C. 一定没有定义　　　　D. 有定义且 $f(x_0)=a$

(4)$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin mx}{2x}=\dfrac{2}{3}$,则 $m=$(　　).

A. 1　　　　B. 2

C. $\dfrac{4}{9}$　　　　D. $\dfrac{9}{4}$

(5)关于无穷小量,下列说法正确的是(　　).

A. 0 是无穷小量

B. 无穷小量就是 0

C. 无穷小量就是很小的数

D. 比任何数都小的数是无穷小量

(6)$f(x)=\dfrac{1-\cos x}{x^2}\ln(x+2)$,则 $x=0$ 是(　　).

A. 无穷间断点　　　　B. 可去间断点

C. 振荡间断点　　　　D. 跳跃间断点

2. 填空题.

(1)$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{5x}=$________.

(2)$\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=$________.

(3)$f(x)=\begin{cases}x-1, x\leqslant 0\\ x^2, x>0\end{cases}$,则$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=$________,$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=$________.

(4)$f(x)=\begin{cases}e^x, x\leqslant 0\\ 2\sin x+1, x>0\end{cases}$,则$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=$________.

(5)$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+ax+4}{x^2-1}=-\dfrac{3}{2}$,则 $a=$________.

(6)$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{x^2-1}, x\neq 1\\ 0, x=1\end{cases}$ 的间断点为________.

3. 计算题.

(1)求下列函数极限.

①$\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^2-4}{x+2}$;

②$\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{1}{1-x}-\frac{2}{1-x^2}\right)$;

③$\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos 2x}{x \sin x}$;

④$\lim\limits_{x \to 0} (1-2x)^{\frac{3}{x}}$.

(2)证明方程 $x^5-3x=1$ 至少有一个根介于 1 和 2 之间.

(3)判断函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-2}{x-2}, x\neq 2\\ 1, x=2\end{cases}$ 在 $x=2$ 处是否连续.

(4)设 $f(x)=\begin{cases}2x^2+a, x\leqslant 0\\ e^x(\sin x+\cos x), x>0\end{cases}$,若 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续,求 a.

1.3 导数与微分

一、典型例题分析

例 1 设函数 $y=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\sin^2 x, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}$，试求 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的导数.

解 本题函数是分段函数，对于分段函数在分界点处的导数，必须由定义来求.

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\sin^2\Delta x}{\Delta x}-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}\right)^2=1.$$

例 2 求曲线 $f(x)=\sin x$ 在点 $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 处的切线.

解 设切线的斜率为 k，有

$$k=f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

则切线方程为

$$y-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right),$$

即

$$4\sqrt{2}x-8y+4\sqrt{2}-\sqrt{2}\pi=0.$$

例 3 已知 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$，求 $y''(0)$.

解 $y'=\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot(x+\sqrt{x^2+1})'=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$，

$$y''=-\frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{3}{2}}\cdot(2x)=-\frac{x}{\sqrt{(x^2+1)^3}},$$

所以 $y''(0)=0$.

例 4 设曲线 $y=ax^2+bx+c$ 在 $x=-1$ 处取得极值，且与曲线 $y=3x^2$ 相切于点 $(1,3)$，试确定常数 a,b,c 的值.

解 曲线 $y=ax^2+bx+c$ 在 $x=-1$ 处取得极值，则有 $y'(-1)=-2a+b=0$.

又曲线 $y=ax^2+bx+c$ 与曲线 $y=3x^2$ 相切于点 $(1,3)$，则有

$(ax^2+bx+c)'|_{x=1}=(3x^2)'|_{x=1}$，即 $2a+b=6$.

而(1,3)是两曲线切点，在曲线 $y=ax^2+bx+c$ 上，故有 $a+b+c=3$.

解方程组 $\begin{cases}-2a+b=0\\2a+b=6\\a+b+c=3\end{cases}$，可得 $a=\dfrac{3}{2}$，$b=3$，$c=-\dfrac{3}{2}$.

二、教材习题详解

1. 求下列函数的导数.

(1) $y=x^3+\dfrac{1}{x}$；

(2) $y=x^2\cos x$；

(3) $y=x^2(2+x)$；

(4) $y=\dfrac{x}{1+x^2}$；

(5) $y=\sin\dfrac{1}{x}$；

(6) $y=\ln(x^2+x+1)$.

解 (1) $y'=\left(x^3+\dfrac{1}{x}\right)'=3x^2-\dfrac{1}{x^2}$；

(2) $y'=(x^2\cos x)'=(x^2)'\cos x+x^2(\cos x)'=2x\cos x-x^2\sin x$；

(3) $y=x^2(2+x)=2x^2+x^3$，$y'=(2x^2+x^3)'=4x+3x^2$；

(4) $y'=\dfrac{x'(1+x^2)-x(1+x^2)'}{(1+x^2)^2}=\dfrac{(1+x^2)-x(2x)}{(1+x^2)^2}=\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$；

(5) $y'=\cos\dfrac{1}{x}\cdot\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^2}\cos\dfrac{1}{x}$；

(6) $y'=\dfrac{1}{x^2+x+1}(x^2+x+1)'=\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$.

2. 求下列函数的微分.

(1) $y=\dfrac{x^2}{1+x}$；

(2) $y=\sin x-x\cos x$；

(3) $y=xe^x$；

(4) $y=\sin^2x$.

解 (1) $dy=\left(\dfrac{x^2}{1+x}\right)'dx=\dfrac{2x(1+x)-x^2}{(1+x)^2}dx=\dfrac{2x+x^2}{(1+x)^2}dx$；

(2) $dy=(\sin x-x\cos x)'dx=(\cos x-\cos x+x\sin x)dx=x\sin x\,dx$；

(3)$\mathrm{d}y=(xe^x)'\mathrm{d}x=(e^x+xe^x)\mathrm{d}x=e^x(1+x)\mathrm{d}x$；

(4)$\mathrm{d}y=(\sin^2 x)'\mathrm{d}x=2\sin x\cdot\cos x\mathrm{d}x=\sin 2x\mathrm{d}x$.

3.求下列函数的极值.

(1)$f(x)=x^3-3x^2-9x-3$；

(2)$f(x)=\ln(1+x^2)$；

(3)$f(x)=xe^x$；

(4)$f(x)=\ln(1+x)-x$.

解　(1)$f(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$，$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$.

令$f'(x)=0$，得驻点$x_1=-1$，$x_2=3$.列表(见表1-1).

表 1-1

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,3)$	3	$(3,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

故得$x=-1$为$f(x)$的极大值点，极大值为$f(-1)=2$，$x=3$为$f(x)$的极小值点，极小值为$f(3)=-30$.

(2)$f(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$，$f'(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$.

令$f'(x)=0$，得驻点$x=0$.列表(见表1-2).

表 1-2

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

故得$x=0$为$f(x)$的极小值点，极小值为$f(0)=0$.

(3)$f(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$，$f'(x)=e^x+xe^x=e^x(1+x)$.

令$f'(x)=0$，得驻点$x=-1$.列表(见表1-3).

表 1-3

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

故得$x=-1$为$f(x)$的极小值点，极小值为$f(-1)=-\dfrac{1}{e}$.

(4)$f(x)$的定义域为$(-1,+\infty)$，$f'(x)=\dfrac{1}{1+x}-1=-\dfrac{x}{1+x}$.

令$f'(x)=0$，得驻点$x=0$.列表(见表1-4).

表 1-4

x	$(-1,0)$	0	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$

故得 $x=0$ 为 $f(x)$ 的极大值点，极大值为 $f(0)=0$.

4. 求曲线 $y=x^3-3x^2+2$ 在点(1,0)处的切线的方程.

解 所求切线的斜率 k 为

$$k=(x^3-3x^2+2)'\big|_{x=1}=(3x^2-6x)\big|_{x=1}=-3,$$

故所求切线方程为

$$y-0=-3(x-1),$$

即

$$3x+y-3=0.$$

三、习题自测

1. 选择题.

(1)设 $f(x)$ 为可导函数，且 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{2\Delta x}=1$，则 $f'(x_0)=$(　　).

A. 1　　B. 0

C. 2　　D. $\dfrac{1}{2}$

(2)设 $y=\ln\sin x$，则 $f'(x)=$(　　).

A. $\dfrac{1}{\cos x}$　　B. $\tan x$

C. $\cot x$　　D. $-\tan x$

(3)设 $F(x)=f(x)+f(-x)$，且 $f'(x)$ 存在，则 $F'(x)$ 是(　　).

A. 奇函数　　B. 偶函数

C. 非奇非偶函数　　D. 不能判定奇偶性的函数

(4)若可微函数 $f(x)$ 在 x_0 处取到极值 $f(x_0)$，则(　　).

A. $f'(x_0)=0$　　B. $f'(x_0)>0$

C. $f'(x_0)<0$　　D. $f'(x_0)$ 不一定存在

2. 填空题.

(1)设 $y=\ln\sin x$，则 $y''=$________.

(2)设 $y=x\ln x$，则 $\mathrm{d}y=$________ $\mathrm{d}x$.

(3)曲线 $y=\cos x$ 上的点 $\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{1}{2}\right)$ 处的切线的斜率为________.

(4)曲线 $y=\ln x$ 与 $y=ax^2+b$ 在(1,0)处相切，则 $a=$________，$b=$________.

(5)若 x_0 是可微函数 $f(x)$ 的极值点,则 $f'(x_0)=$________.

3. 计算题.

(1)求下列函数的导数.

①$y=\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$;

②$y=x\arctan x$;

③$y=\sqrt{1+\ln x}$;

④$y=\ln\cos x$.

(2)求函数 $f(x)=x^3-6x^2+9x-3$ 在$[-3,4]$上的极值.

1.4 级　　数

一、典型例题分析

例 1　判别级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3n^2+1}{2^n}$的敛散性.

解　因为$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{3(n+1)^2+1}{2^{n+1}}}{\dfrac{3n^2+1}{2^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3(n+1)^2+1}{2(3n^2+1)}=\dfrac{1}{2}<1$,

所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3n^2+1}{2^n}$收敛.

例 2　讨论下列级数是绝对收敛还是条件收敛.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n+2}{(n+1)\sqrt{n}}$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\dfrac{n}{2^n}$.

解　(1) 因$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\dfrac{n+2}{(n+1)\sqrt{n}}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+2}{(n+1)\sqrt{n}}$,且$\dfrac{n+2}{(n+1)\sqrt{n}}>\dfrac{n+2}{(n+2)\sqrt{n}}=\dfrac{1}{\sqrt{n}}$,级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$发散,所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+2}{(n+1)\sqrt{n}}$也发散. 又因$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n+2}{(n+1)\sqrt{n}}$为交错级数,$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+2}{(n+1)\sqrt{n}}=0$,且

$$\begin{aligned}\frac{n+2}{(n+1)\sqrt{n}}&=\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}}>\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\frac{1}{(n+1+1)\sqrt{n+1}}\\&=\frac{(n+1)+2}{[(n+1)+1]\sqrt{n+1}},\end{aligned}$$

满足莱布尼茨判别法的两个条件,故收敛,所以原级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n+2}{(n+1)\sqrt{n}}$为条件收敛.

(2) 因$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\dfrac{n}{2^n}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^n}$,且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{n+1}{2^{n+1}}}{\dfrac{n}{2^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{2^{n+1}}\cdot\dfrac{2^n}{n}=\dfrac{1}{2}<1$,

所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^n}$收敛,原级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\dfrac{n}{2^n}$为绝对收敛.

例 3　求幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(x-2)^n}{\sqrt{n+1}}$的收敛半径与收敛开区间.

解　令 $x-2=t$,原级数化为关于 t 的幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{t^n}{\sqrt{n+1}}$.因

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}}\right|=1,$$

所以 $R=1$,从而 $-1<x-2<1$,即 $1<x<3$,因此幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(x-2)^n}{\sqrt{n+1}}$的收敛半径为 $R=1$,收敛开区间为$(1,3)$.

例 4　将下列函数在指定点处展开为泰勒级数.

(1)e^{-x^2},$x=0$;

(2)$\dfrac{1}{x}$,$x=3$.

解　(1) 因为 $\mathrm{e}^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}x^n$,$(-\infty,+\infty)$,所以

$$\mathrm{e}^{-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(-x^2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^{2n},(-\infty,+\infty).$$

(2) 因为$\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{3+(x-3)}=\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{1+\dfrac{x-3}{3}}$,又$\dfrac{1}{1+x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$,$(-1,1)$,于是当 $-1<\dfrac{x-3}{3}<1$,即 $0<x<6$ 时,有

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{3}\frac{1}{1+\dfrac{x-3}{3}}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x-3}{3}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-3)^n}{3^{n+1}}.$$

二、教材习题详解

1. 判别下列级数的敛散性.

(1)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{3n+1}$;

(2)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)(n+4)}$;

(3)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!}$;

(4)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n\cdot n}$.

解　(1) 因为$\dfrac{2}{3n+1}\geqslant\dfrac{2}{3n+n}=\dfrac{1}{2n}$,

且级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n}=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散,所以由比较审敛法可知,级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{3n+1}$发散.

(2) 因为$\dfrac{1}{(n+1)(n+4)}<\dfrac{1}{n^2}$,

且级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$收敛,所以由比较审敛法可知,级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)(n+4)}$收敛.

(3) 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{(n+1)!}}{\dfrac{1}{n!}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{(n+1)!}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}=0<1$,

故由比值审敛法可知,级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!}$收敛.

(4) 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{3^{n+1}(n+1)}}{\dfrac{1}{3^n n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)=\dfrac{1}{3}<1$,

故由比值审敛法可知,级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n\cdot n}$收敛.

2. 判别下列级数的敛散性;若收敛,是绝对收敛还是条件收敛?

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n^2}$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{(2n-1)^2}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n}{3^{n-1}}$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$.

解 (1) 因$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n^2}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$,级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$收敛,

所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n^2}$绝对收敛.

(2) 因$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\dfrac{1}{(2n-1)^2}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}$,且$\dfrac{1}{(2n-1)^2}<\dfrac{1}{n^2}$,

级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$收敛,所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{(2n-1)^2}$绝对收敛.

(3) 因$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{n+1}{3^n}}{\dfrac{n}{3^{n-1}}}=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n}=\dfrac{1}{3}<1$,

由比值审敛法可知,级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛,故原级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n}{3^{n-1}}$绝对收敛.

(4) 因$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$,级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散,

考虑原级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$为交错级数,满足莱布尼茨判别法的两个条件,故收敛,所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$为条件收敛.

3. 求下列幂级数的收敛区间.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n-1}}{n\cdot 2^n}$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{(2n)!}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n^2}$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{n^2}x^n$.

解 (1) 因$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\dfrac{1}{(n+1)2^{n+1}}}{\dfrac{1}{n\cdot 2^n}}\right|=\dfrac{1}{2}$,所以$R=2$,收敛区间为$(-2,2)$.

(2) 因$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\dfrac{1}{(2n+2)!}}{\dfrac{1}{(2n)!}}\right|=0$,所以$R=+\infty$,收敛区间为$(-\infty,+\infty)$.

(3) 因$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\dfrac{1}{(n+1)^2}}{\dfrac{1}{n^2}}\right|=1$,所以$R=1$,收敛区间为$(-1,1)$.

(4) 因$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\dfrac{2^{n+1}}{(n+1)^2}}{\dfrac{2^n}{n^2}}\right|=2$,所以$R=\dfrac{1}{2}$,收敛区间为$\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$.

4. 将下列函数展开成x的幂级数.

(1) $\dfrac{1}{1+x}$;

(2) $\dfrac{1}{3-x}$;

(3) $\dfrac{1}{1+x^2}$;

(4) $x\mathrm{e}^x$.

解 (1) $\frac{1}{1+x}=\frac{1}{1-(-x)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n,(-1,1)$；

(2) $\frac{1}{3-x}=\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{x}{3}}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{x}{3})^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^{n+1}}x^n,(-1,1)$；

(3) $\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{1-(-x^2)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n},(-1,1)$；

(4) $xe^x=x\left(1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{n+1},(-\infty,+\infty)$.

三、习题自测

1. 选择题.

(1) 级数$\frac{2}{1}-\frac{3}{2}+\frac{4}{3}-\frac{5}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{n+1}{n}+\cdots$的敛散性是(　　).

A. 收敛　　B. 发散

C. 不确定　　D. 收敛于 1

(2) 级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$的敛散性是(　　).

A. 条件收敛　　B. 绝对收敛

C. 发散　　D. 不确定

(3) 幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}x^n$的收敛区间为(　　).

A. $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$　　B. $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$

C. $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$　　D. $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$

(4) 函数 $f(x)=\frac{1}{4-x}$ 展开为 x 的幂级数为(　　).

A. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{4^{n+1}}$　　B. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{4^n}$

C. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{4^{n+1}}$　　D. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{4^n}$

2. 填空题.

(1) 已知级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$收敛，则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n n!}{n^n}=$________.

(2) 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}$收敛于________.

(3) 交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n(n+1)}$是________.(条件收敛或绝对收敛)

(4) 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n}$ 的收敛半径是________,收敛区间为________.

(5) 函数 $x^2\mathrm{e}^x$ 在 $x=0$ 处的泰勒级数为________.

3. 计算题.

(1) 判别下列级数的敛散性.

①$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3}{4n+1}$;

②$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)(n+3)}$;

③$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n!}$;

④$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n\cdot n}$.

(2) 判别下列级数的敛散性;若收敛,是绝对收敛还是条件收敛?

①$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$;

②$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3n}{4^{n-1}}$;

③$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n^2+1}$;

④$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$.

(3) 将下列函数展开成 x 的幂级数.

①$(2-x)\mathrm{e}^x$；

② $\dfrac{1}{3+x}$；

③ $\dfrac{3-2x}{1+x}$.

第 1 章习题自测参考答案

1.5 教材本章测试题参考答案

一、填空题

1. $(1,+\infty)$

2. 3

3. 2

4. 可去

5. $-2a$

6. $(\cos x-x\sin x)\mathrm{d}x$

7. $(1,-2)$

8. $x=0$

9. 发散

10. 2

二、选择题

1. C　2. D　3. A　4. A　5. C　6. D　7. A　8. A　9. B　10. B

三、解答题

1. 解　(1)要使函数有意义,应满足$\begin{cases}3-x>0\\x-1>0\end{cases}$,即$1<x<3$,函数定义域是$(1,3)$;

(2)$f(2)=\ln(3-2)+\dfrac{1}{\sqrt{2-1}}=0+1=1$.

2. 解　$f\left(\sin\dfrac{x}{2}\right)=\cos x+1=1-2\sin^2\dfrac{x}{2}+1=2\left(1-\sin^2\dfrac{x}{2}\right)$,因此$f(x)=2(1-x^2)$.

3. 解　(1)$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-8}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+2x+4}{x+2}=3$;

(2)$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+1}{x^2+x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=2$;

(3)$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sin 2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{1}{2}}{\dfrac{\sin 2x}{2x}}=\dfrac{1}{2}$;

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x+1}\right)^{3x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{3x+1}\right)^{3x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1-\dfrac{2}{3x+1}\right)^{-\frac{3x+1}{2}}\right]^{-\frac{6x}{3x+1}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}-\frac{6x}{3x+1}}=\mathrm{e}^{-2}$.

4. **解** 原函数是分段函数，当 $x<0$ 及 $x>2$ 时 $f(x)=4$ 是初等函数，在 $(-\infty,0)$ 和 $(2,+\infty)$ 内是连续函数. 在 $x=0$ 时，因为

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}4=4,\ \lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}(x+2)=2,$$

左、右极限都存在但不相等，所以函数在 $x=0$ 处不连续，$x=0$ 是第一类间断点.

在 $x=2$ 时，因为

$$\lim_{x\to2^+}f(x)=\lim_{x\to2^+}4=4,\ \lim_{x\to2^-}f(x)=\lim_{x\to2^-}(x+2)=4,\text{即}\lim_{x\to2}f(x)=4,$$

又 $f(2)=4$，极限值等于函数值，故函数在 $x=2$ 处连续.

5. **解** (1) $y'=2\mathrm{e}^{2x}+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$;

(2) $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{1+\ln x}}\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{2x\sqrt{1+\ln x}}$;

(3) $y'=\cos\ln x\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{\cos\ln x}{x}$;

(4) $y'=\dfrac{1}{\cos 3x}\cdot(-\sin 3x)\cdot 3=-3\tan 3x$.

6. **解** $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$.

令 $f'(x)=0$，得驻点 $x_1=0$，$x_2=2$. 列表得

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

故 $x=0$ 为 $f(x)$ 的极大值点，极大值为 $f(0)=1$，$x=2$ 为 $f(x)$ 的极小值点，极小值为 $f(2)=-3$.

7. **证明** 设函数 $f(x)=x^3+3x-1$，显然 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，又 $f(0)=-1<0$，$f(1)=3>0$，所以由零点定理可知，在区间 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=0$，即 $\xi^3+3\xi-1=0$，所以方程 $x^3+3x-1=0$ 至少有一个小于 1 的正根.