（第2版）

新编高等数学

XINBIAN GAODENG SHUXUE

策划编辑：金颖杰
责任编辑：高　宇
封面设计：刘文东

ISBN 978-7-5635-6626-6

定价：49.80元

新编高等数学（第2版）　主编　尹　光　北京邮电大学出版社

X-A

“十四五”职业教育国家规划教材

（第2版）

新编高等数学

主编　尹　光

北京邮电大学出版社
www. buptpress. com

"十四五"职业教育国家规划教材

（第2版）

新编高等数学

主　编　尹　光
副主编　陈金涛　刘云川　高　宁

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

内 容 简 介

本书在第1版的基础上整合了部分章节内容，并通过“想一想”“思政小课堂”等形式融入了课程思政相关内容. 全书共分10章，内容包括函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、多元微积分、常微分方程、无穷级数、线性代数.

本书可作为高等职业院校各专业高等数学课程的教材，也可供相关人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

新编高等数学 / 尹光主编 . -- 2版 . -- 北京：北京邮电大学出版社，2022.4(2024.7重印)

ISBN 978-7-5635-6626-6

Ⅰ. ①新…　Ⅱ. ①尹…　Ⅲ. ①高等数学—高等职业教育—教材　Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2022)第055415号

策划编辑：金颖杰　　**责任编辑：**高　宇　　**封面设计：**刘文东

出版发行：北京邮电大学出版社
社　　址：北京市海淀区西土城路10号
邮政编码：100876
发 行 部：电话：010-62282185　**传真：**010-62283578
E-mail：publish@bupt.edu.cn
经　　销：各地新华书店
印　　刷：三河市龙大印装有限公司
开　　本：787 mm×1 092 mm　1/16
印　　张：17
字　　数：352千字
版　　次：2022年4月第2版
印　　次：2024年7月第5次印刷

ISBN 978-7-5635-6626-6　　定　价：49.80元

·如有印装质量问题，请与北京邮电大学出版社发行部联系·

服务电话：400-615-1233

第2版前言

高等数学可以培养学生的运算能力、抽象思维能力和逻辑推理能力，为学生学习专业知识、掌握职业技能和终身发展奠定基础.

本书是在“十三五”职业教育国家规划教材的基础上，根据教育部印发的《“十四五”职业教育规划教材建设实施方案》和《高等学校课程思政建设指导纲要》等文件修订而成的.

本次修订从近几年教材使用情况的反馈意见以及教材要体现立德树人的根本任务的实际要求出发，强调将学生的数学理论知识学习与数学建模能力培养并举，并通过融入课程思政元素激发学生的爱国主义热情、民族自豪感和使命感，增强学生对高职数学课程学习的信心.

本次修订主要体现以下特点.

1. 根据教学使用现状，整合章节内容

根据近几年用书师生的反馈意见，在第 4 章中增加了“曲线的凹凸性与拐点”的内容，在第 7 章中增加了“空间解析几何”的内容. 本书内容不仅适合高职专科学段的学生学习，而且可以为学生准备专升本考试提供帮助. 同时，本书调整了习题的设置，使之与知识点更加匹配.

2. 立德树人，融入思政元素

为贯彻执行《高等学校课程思政建设指导纲要》《关于加强和改进新形势下高校思想政治工作的意见》，推进习近平新时代中国特色社会主义思想进课堂进教材进头脑，落实党的二十大精神，本书在修订过程中通过增加“想一想”“思政小课堂”等栏目的形式融入了课程思政的相关内容.

3. 开发教学资源,打造融媒体教材

本书借助先进技术,修订升级为融媒体教材. 增加了微课二维码等教学资源,以便为教师提供混合式教学服务,以支持网络化及多媒体等现代教学方式,从而有效提高教学质量.

本书由尹光任主编,由陈金涛、刘云川、高宁任副主编,宋武、谢文、张学云、黄涛、陈宇、白余、毛鑫、邹泳参与了编写.

由于编者水平有限,书中难免存在疏漏和不足之处,敬请广大读者批评指正.

编　者

第1版前言

“高等数学”是我国高等教育中不可或缺的重要组成部分，高等数学的思想和方法也越来越多地应用于各个学科和领域. 作为高等教育各专业的公共基础课程，如何快速掌握其基本内涵和其所蕴含的思想、方法是相关教育部门和各个教学单位应认真思考、仔细研究、积极应对的问题.

本书根据现阶段我国教育教学改革的需要，在充分总结一线教师教学经验的基础上编写而成，旨在充分满足学校教师的教学和学生的学习需要.

与同类教材相比，本书具有如下一些特点.

(1)内容选取以“必需、够用”为原则，理论讲解简单易懂，陈述清晰明了，易于学生接受.

(2)注重知识拓展. 数学类课程本就是一门“枯燥”的课程，适当增加一些拓展性的知识板块，除了可以拓展学生的知识面，还可以活跃课堂气氛，益于学生提起学习兴趣.

(3)与实际结合紧密. 每一章都设置了与实际紧密结合的应用实例，以便将数学知识与实际生活相结合，充分展示数学的魅力和实用价值.

(4)设置数学实验，强化学生的动手实践能力. 数学既是一门“枯燥”的理论性课程，也是一门需要“动手”的操作性课程. 利用 MATLAB 这一工具，可以将一些数学问题程序化、直观化，更加益于学生理解，有效提升其学习兴趣.

本书由尹光任主编，由陈金涛、刘云川、高宁任副主编，宋武、谢文、张学云、黄涛、陈宇、白余、毛鑫、邹泳参与了编写.

由于编者水平有限，书中难免存在疏漏和不足之处，敬请广大读者批评指正.

编　者

目　　录

第 1 章

函　数

阅读与欣赏

函数的发展

最早提出函数概念的，是 17 世纪德国数学家莱布尼茨. 最初，莱布尼茨用“函数”一词表示幂. 后来，他又用函数表示在直角坐标系中曲线上一点的横坐标、纵坐标. 1718 年，莱布尼茨的学生约翰·伯努利在莱布尼茨函数概念的基础上对函数进行了明确定义:“由某个变量及任意的一个常数结合而成的数量.”意思是凡变量 x 和常量构成的式子都叫作 x 的函数，他强调函数要用公式来表示.

等到康托尔创立的集合论被大家接受后，人们开始用集合对应关系来定义函数概念.

我国清代数学家李善兰在翻译《代数学》(1895 年) 一书时，把“function”译成“函数”. 中国古代“函”字与“含”字通用，都有“包含”的意思. 李善兰给出的定义是:“凡式中含天，为天之函数.”中国古代用天、地、人、物来表示 4 个不同的未知数或变量. 这个定义的含义是:“凡是公式中含有变量 x，则该式子叫作 x 的函数.”所以，“函数”是指公式里含有变量.

1.1　函数及其性质

在现实世界中,许多量之间都有依赖关系,当一个量变化时,另一个量随之变化. 函数正是研究各个量之间确定性依赖关系的数学模型.

1.1.1　函数的概念

函数是描述变量间相互依赖关系的一种数学模型.

在某一自然现象或社会现象中,往往存在多个不断变化的量,即变量. 这些变量并不是孤立变化的,而是相互联系并遵循一定的规律的,函数就是用来描述这种联系的. 下面先讨论两个变量的情形.

例如,在自由落体运动中,设物体下落的时间为 t,下落的距离为 s,假定开始下落的时刻 $t=0$,则变量 s 与 t 之间的相依关系由数学模型

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

给定. 其中,g 是重力加速度.

我国自主研发的能力日趋成熟,其中高铁技术已处于世界领先水平. 目前国内高铁的平均时速为 350 km,但这只是一个相对安全的运行速度,而不是中国高铁的上限时速,京沪线的最高时速可达 486.1 km. 假设高铁以 350 km/h 匀速行驶,则运行里程与时间的关系为

$$s=350t$$

其中,s 为运行里程;t 为运行时间.

定义 1.1　设 x 和 y 是两个变量,D 是一个给定的非空数集. 若对于每个 $x\in D$,变量 y 按照一定法则 f 总有确定的数值与它对应,则称 y 是 x 的**函数**,记为

$$y=f(x),x\in D$$

其中 x 称为**自变量**,y 称为**因变量**,数集 D 称为这个函数的**定义域**.

对每个 $x\in D$,按照对应法则 f,总有确定的值 y 与之对应,这个值称为函数在点 x 处的**函数值**,记为 $f(x)$. 因变量与自变量的这种依赖关系通常称为**函数关系**.

当自变量 x 遍取 D 的所有数值时,对应的函数值 $f(x)$ 的全体所构成的集合称为函数 f 的**值域**,记为 M,即

$$M=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$$

由函数的定义可以看出,函数的定义域与对应法则是确定函数的两个必不可少的要素. 也就是说,如果两个函数的对应法则和定义域都相同,那么这两个函数就是相同的函数. 例如,$f(x)=\sin^2x+\cos^2x$ 与 $g(x)=1$ 是相同的函数,而 $f(x)=\ln x^2$ 与 $g(x)=2\ln x$ 不是相同的函数.

关于函数的定义域,在实际问题中应根据问题的实际意义来确定. 若讨论的是纯数学问题,则往往取使函数的表达式有意义的一切实数(分母不能为零,开偶次方根时被开方数不小于零,零和负数没有对数,等等)所构成的集合作为该函数的定义域.

例如，函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的定义域为开区间$(-1,1)$.

再如，用长为 24 m 的铁丝围成一个面积为 S 的长方形，则面积 S 与长 x 之间的函数关系为 $S=(12-x)x$，此函数的定义域为 $x\in(0,12)$.

对函数 $y=f(x)(x\in D)$，若取自变量 x 为横坐标，因变量 y 为纵坐标，则在平面直角坐标系 xOy 中就确定了一个点(x,y). 当 x 遍取定义域 D 中的每一个数值时，平面上的点集

$$C=\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$$

称为函数 $y=f(x)$ 的**图像**(见图 1-1).

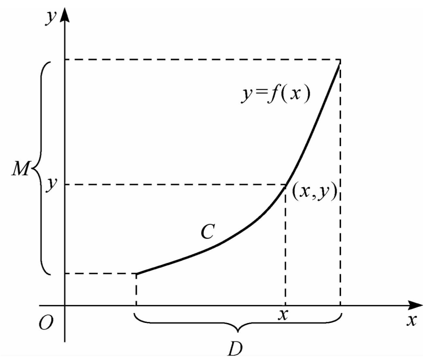

图 1-1

若自变量在定义域内任取一个数值，对应的函数值总是唯一的，这种函数称为**单值函数**，否则称为**多值函数**.

例如，方程 $x^2+y^2=a^2$ 在闭区间$[-a,a]$上确定了一个以 x 为自变量、y 为因变量的函数. 对每一个 $x\in(-a,a)$，都有两个 y 值($\pm\sqrt{a^2-x^2}$)与之对应，因而 y 是多值函数.

注意　*若无特别声明，本书所指函数均为单值函数.*

函数的常用表示法有以下三种.

(1) **列表法**：将自变量的值与对应的函数值列成表格的方法.

(2) **图像法**：在坐标系中用图像来表示函数关系的方法.

(3) **公式法**(**解析法**)：将自变量和因变量之间的关系用数学表达式(解析表达式)来表示的方法.

例 1-1　绝对值函数 $y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$，其定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $M=[0,+\infty)$，它的图像如图 1-2 所示.

例 1-2　符号函数 $y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ 1, & x>0\end{cases}$，其定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $M=\{-1,0,1\}$. 对任一实数 x，总有 $x=\operatorname{sgn}x\cdot|x|$，它的图像如图 1-3 所示.

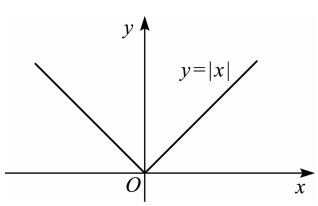

图 1-2

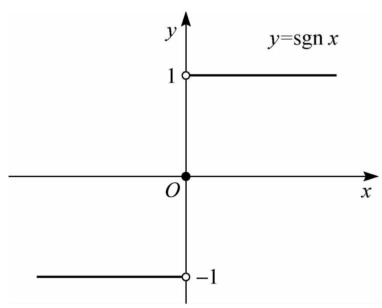

图 1-3

有些函数，对于自变量的不同取值范围，有不同的对应法则，这种函数称为**分段函数**，如例 1-1 和例 1-2 中的两个函数.

例 1-3 取整函数 $y=[x]$，表示不超过数 x 的最大整数. 例如，

$$[2.3]=2,[5]=5,[\pi]=3,[-6.7]=-7$$

取整函数的定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$，值域为 $M=\{0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots\}$，它的图像如图 1-4 所示.

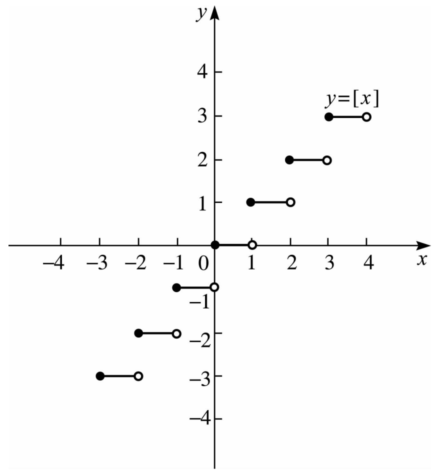

图 1-4

例 1-4 回顾我国改革开放初期，很多地方都有严重缺电的现象. 经过多年的努力，这一局面终于得到了根本改善. 为了提倡居民节约用电，我国实施了阶梯电价，阶梯电价的实施起到了节能环保，避免铺张浪费的作用，让我们几乎不再受到停电的困扰. 例如，某城市居民用电的阶梯电价规则如下：阶梯电价电量按年千瓦时为周期执行，年用电量 2 160 千瓦时及以下执行现行电价，每千瓦时 0.56 元；2 160 ～ 3 120 千瓦时部分执行第二档电量加价标准，每千瓦时电价加收 5 分钱，为 0.61 元；超过 3 120 千瓦时的部分执行第三档电量加价标准，每千瓦时电价多收 3 角钱，为 0.86 元. 请你列出上述函数关系式，若该城市陈先生某年年用电量为 2 850 千瓦时，请计算出陈先生应缴纳的用电费用.

解 设该城市某居民用电量为 x 千瓦时，应缴纳电费为 y 元. 则

当 $x\leqslant 2\,160$ 时，$y=0.56x$；

当 $2\,160<x\leqslant 3\,120$ 时，$y=0.56\times 2\,160+0.61\times(x-2\,160)=0.61x-108$；

当 $x>3\,120$ 时，$y=0.56\times 2\,160+0.61\times(3\,120-2\,160)+0.86\times(x-3\,120)=0.86x-888$. 即函数关系式为

$$y=\begin{cases}0.56x, & x\leqslant 2\,160\\ 0.61x-108, & 2160<x\leqslant 3120\\ 0.86x-888, & x>3120\end{cases}$$

该城市陈先生应缴纳的用电费用为.

$$y=0.61\times 2\,850-108=1\,630.5(\text{元})$$

阶梯电价的实施提高了能源效率，减少了能源浪费，是实现经济健康可持续发展的重要途径之一. 更深层次的意义上来说，我国阶梯电价的实施增强了国家的能源安全和社会稳定能力，使得我国电价水平长期以来在世界上的主要国家中处于低位，它对我国增进民生福祉，提高人民生活品质起到了一定的促进作用.

1.1.2 反函数

在函数中，自变量与因变量的地位是相对的，任意一个变量都可根据需要作为自变量. 例如，在函数 $y=x+5$ 中，x 是自变量，y 是因变量，根据这个式子，可以解出 $x=y-5$，这里 y 是自变量，x 是因变量. 上面两个式子反映了同一个过程中两个变量之间地位的相对性，称它们互为**反函数**.

下面给出反函数的具体定义.

定义 1.2 设函数 $y=f(x)$，其定义域为 D，值域为 M，如果对于任意 $y\in M$，由函数关系式 $y=f(x)$ 恰好**唯一**确定一个 $x\in D$ 与之对应，那么认为 x 是 y 的函数，记作 $x=g(y)$. 我们

称上述的 $y=f(x)$ 与 $x=g(y)$ 互为**反函数**,习惯上将 $x=g(y)$ 记作

$$x=f^{-1}(y)$$

习惯上常用 x 表示自变量,y 表示因变量,故常把 $y=f(x)$ 的反函数写作

$$y=f^{-1}(x)$$

由反函数的定义知,在定义区间上**单调**的函数必有反函数.

例 1-5　函数 $y=\sin x,x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$,则 $x=f^{-1}(y)=\arcsin y,y\in[-1,1]$,故 $y=\sin x,x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$的反函数是 $y=\arcsin x,x\in[-1,1]$.

如果把函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像画在同一平面直角坐标系内,那么这两个图像关于 $y=x$ 对称.

例 1-6　函数 $y=x^3$ 和函数 $y=x^{\frac{1}{3}}$ 的图像如图 1-5 所示.

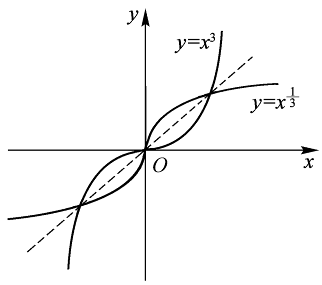

图 1-5

一般地,要求 $y=f(x)$ 的反函数,只需先从 $y=f(x)$ 中解出 x 的表达式,当该表达式也是一个函数时,再将其中的字母 x,y 进行交换即可.

*** 例 1-7**　求函数 $y=\ln(x+\sqrt{x^2-1}),x\in[1,+\infty)$ 的反函数.

解　由 $y=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$,解得

$$e^y=x+\sqrt{x^2-1},e^{-y}=x-\sqrt{x^2-1}$$

故

$$e^y+e^{-y}=2x$$

于是

$$x=\frac{e^y+e^{-y}}{2}$$

故所求反函数为 $y=\frac{e^x+e^{-x}}{2},x\geqslant 0$.

判断函数的反函数是否存在,可以用以下定理.

定理 1.1　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,值域为 M. 若 $f(x)$ 在 D 上是单调增加或单调减少的,则在 M 上 $f(x)$ 的**反函数** $f^{-1}(x)$ **存在**,且 $f^{-1}(x)$ 在 M 上也是**单调增加或单调减少**的.

值得注意的是,由于对于 y 的某些值,满足 $y=f(x)$ 的 x 有时不止一个,所以并非任何函数在其定义域内都存在反函数. 但是,当我们对 x 的取值范围加以限制时,也有可能存在反函数. 例如,函数 $y=x^2$ 在$(-\infty,+\infty)$内不存在反函数,但在$(-\infty,0)$及$[0,+\infty)$内却分别存在反函数 $y=-\sqrt{x},0<x<+\infty$ 及 $y=\sqrt{x},0\leqslant x<+\infty$.

对于分段函数求其反函数,只需分别求出与各子定义域相对应的函数表达式的反函数及其自变量的取值范围即可.

例 1-8　设函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{3}, & -2<x<1\\ x^2, & 1\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$,求其反函数 $f^{-1}(x)$.

解　设 $y=f(x)$,则由反函数的定义,得

$$x=\begin{cases}3y, & -2<3y<1\\ \sqrt{y}, & 1\leqslant\sqrt{y}\leqslant 2\end{cases}=\begin{cases}3y, & -\frac{2}{3}<y<\frac{1}{3}\\ \sqrt{y}, & 1\leqslant y\leqslant 4\end{cases}$$

将 x,y 互换,得所求反函数为

$$f^{-1}(x)=y=\begin{cases}3x, & -\dfrac{2}{3}<x<\dfrac{1}{3}\\ \sqrt{x}, & 1\leqslant x\leqslant 4\end{cases}$$

1.1.3 函数的性质

设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义[区间 I 为函数 $f(x)$ 的整个定义域或其定义域的一部分],则函数一般具有下列几种特性.

1. 有界性

如果存在正数 M,使对任意的 $x\in I$,恒有 $|f(x)|\leqslant M$,则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上**有界**,否则称 $f(x)$ 在区间 I 上**无界**.

从图像上看,有界函数的图像介于两条直线 $y=-M$ 与 $y=M$ 之间(见图 1-6). 例如,函数 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界,因为对任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$,恒有 $|\sin x|\leqslant 1$,而函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 内无界,但在区间 $(1,2)$ 内有界.

2. 单调性

若对任意的 $x_1,x_2\in I$,当 $x_1<x_2$ 时,恒有 $f(x_1)<f(x_2)$[或 $f(x_1)>f(x_2)$],则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上**单调增加**(或**单调减少**). 区间 I 称为**单调增区间**(或**单调减区间**);单调增加函数和单调减少函数统称为**单调函数**;单调增区间和单调减区间统称为**单调区间**.

一般地,单调增加函数的图像为沿 x 轴正向单调上升的曲线,如图 1-7 所示;单调减少函数的图像为沿 x 轴正向单调下降的曲线,如图 1-8 所示.

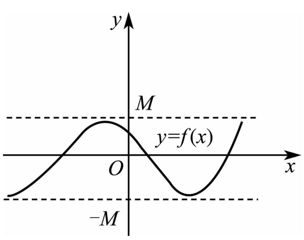

图 1-6

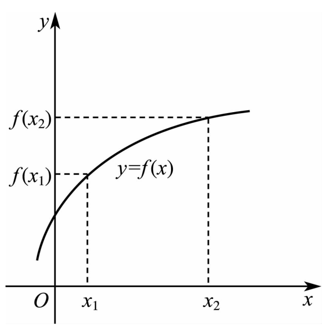

图 1-7

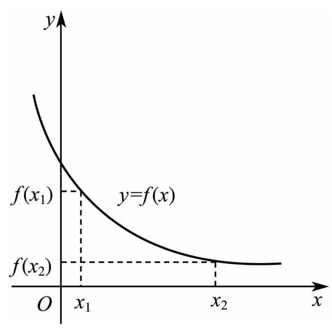

图 1-8

例如,$y=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调增加函数;$y=x^2$ 在 $(-\infty,0]$ 内单调减少,在 $[0,+\infty)$ 内单调增加,在 $(-\infty,+\infty)$ 内不是单调函数.

3. 奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义区间 I 关于原点对称,若对任意的 $x\in I$,都有 $f(-x)=f(x)$,则称函数 $f(x)$ 是区间 I 上的**偶函数**;若对任意的 $x\in I$,都有 $f(-x)=-f(x)$,则称函数 $f(x)$ 是区间 I 上的**奇函数**;若函数既不是奇函数也不是偶函数,则称为**非奇非偶函数**.

偶函数 $f(x)$ 的图像关于 y 轴对称(见图 1-9),奇函数的图像关于原点对称(见图 1-10).

例如,$y=x^3+\sin x$ 为奇函数,$y=\cos x$ 为偶函数,而 $y=x^2+x$ 为非奇非偶函数.

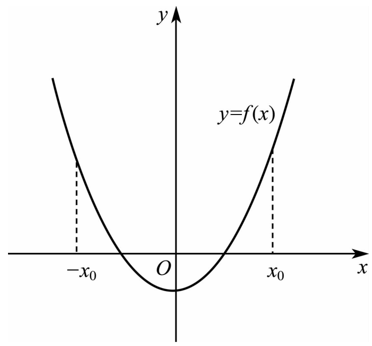

图 1-9

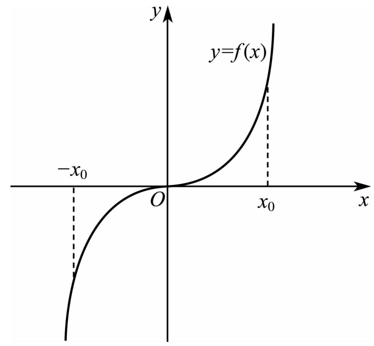

图 1-10

4. 周期性

如果存在不为零的正实数 T，使得对于任意的 $x \in I$，$x+T \in I$，都有 $f(x+T)=f(x)$，则称函数 $y=f(x)$ 为**周期函数**，T 是 $y=f(x)$ 的一个**周期**. 通常所说的周期函数的周期是指它的最小正周期.

例如，$y=\cos x$ 是以 2π 为周期的周期函数，$y=\tan x$ 是以 π 为周期的周期函数.

习题 1.1

1. 判断下列结论是否正确(请在括号中打“√”或“×”).

(1) 若两个函数的定义域与值域相同，则这两个函数是相同的函数. ( )

(2) 分段函数是由两个或两个以上的函数组成的. ( )

(3) 偶函数的图像不一定过原点，奇函数的图像一定过原点. ( )

(4) 当 $x \in (0,+\infty)$ 时，函数 $y=|f(x)|$ 与 $y=f(|x|)$ 的图像相同. ( )

2. 填空题.

(1) 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x+3)=f(x)$，则 $f(6)=$ ________.

(2) 函数 $f(x)=x^2-5x+4$ 在________单调递减，在________单调递增.

(3) $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x \geqslant 1 \\ 1-x, & x<1 \end{cases}$，则 $f[f(-2)]=$ ________.

3. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\sqrt{2x-3}+\dfrac{1}{x-3}$； (2) $f(x)=\sqrt{1-2^x}+\dfrac{1}{\sqrt{x+3}}$.

4. 做出下列函数的图像.

(1) $y=|x-2| \cdot (x+1)$； (2) $y=\begin{cases} x+1, & x \geqslant 3 \\ x^2-5, & x<3 \end{cases}$.

5. 珍惜不可再生资源、节能环保是我们每个人都应该奉行的生活理念. 现在很多城市采用了阶梯式收水费的政策. 例如，某城市规定四口及四口以下的居民之家每月每户基准用水量核定为 26 t，每吨按 1.98 元计收，超出部分的用水将分别按照基准水价的 1.5 倍(1～8 t)、2 倍(8 t 以上)进行阶梯收费. 请你列出上述函数关系式. 读取你家当月水表数据，按此收费标准计算出该月水费，并思考可以从哪些方面减少用水量.

1.2 初等函数

1.2.1 基本初等函数

中学学过的常量函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为**基本初等函数**.

(1) 常量函数. $y = C$(C 为常数),该函数的定义域为$(-\infty, +\infty)$,图像为过点$(0, C)$ 且平行于 x 轴的直线.

(2) 幂函数. $y = x^a$(a 为实数),该函数的定义域因 a 的取值不同而不同,但无论 a 为何值,它在区间$(0, +\infty)$ 内总有定义,且图像过点$(1,1)$,$a > 0$ 和 $a < 0$ 的图像分别如图 1-11、图 1-12 所示.

(3) 指数函数. $y = a^x$($a > 0$,且 $a \neq 1$,a 为常数),该函数的定义域为$(-\infty, +\infty)$,值域为$(0, +\infty)$. 当 $a > 1$ 时,函数单调增加;当 $0 < a < 1$ 时,函数单调减少,图像过点$(0,1)$,$y = a^x$ 的图像如图 1-13 所示. 在科学计数法中常用到以 e 为底的指数函数 $y = e^x$(e 为无理数,$e = 2.718\ 28\cdots$).

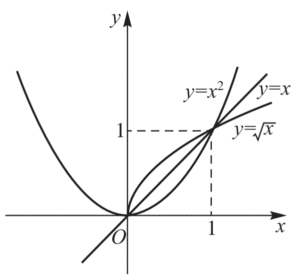

图 1-11

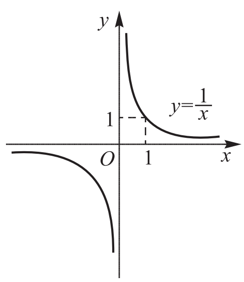

图 1-12

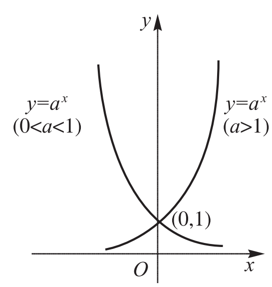

图 1-13

(4) 对数函数. $y = \log_a x$($a > 0$,且 $a \neq 1$,a 为常数),该函数的定义域为$(0, +\infty)$,值域为$(-\infty, +\infty)$,当 $a > 1$ 时,函数单调增加;当 $0 < a < 1$ 时,函数单调减少,图像过点$(1,0)$,具体图像如图 1-14 所示. 在科学计数法中常用到以 e 为底的对数函数,称为自然对数,记作 $y = \ln x$.

(5) 三角函数. $y = \sin x$,$y = \cos x$,$y = \tan x$,$y = \cot x$,$y = \sec x$,$y = \csc x$ 统称为**三角函数**.

① 正弦函数. $y = \sin x$ 的定义域为$(-\infty, +\infty)$,值域为$[-1, 1]$,在$\left[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right]$上单调增加,在$\left[2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{3\pi}{2}\right]$上单调减少,它是以 2π 为周期的周期函数,其中 $k \in \mathbf{Z}$,如图 1-15 所示.

② 余弦函数. $y = \cos x$ 的定义域、值域和周期与正弦函数相同,在$[(2k-1)\pi, 2k\pi]$上单调增加,在$[2k\pi, (2k+1)\pi]$ 上单调减少,其中 $k \in \mathbf{Z}$,如图 1-16 所示.

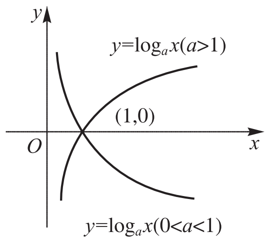

图 1-14

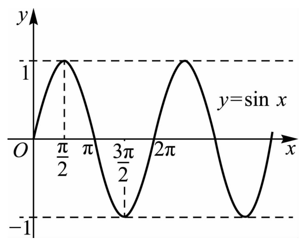

图 1-15

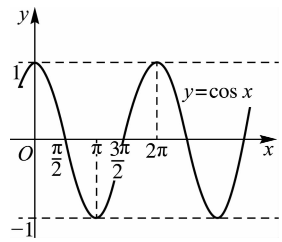

图 1-16

③ 正切函数. $y=\tan x$ 的定义域为$\left(k\pi-\dfrac{\pi}{2},k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)(k\in\mathbf{Z})$,值域为$(-\infty,+\infty)$,是以 π 为周期的周期函数,在有定义的区间上单调增加,如图 1-17 所示.

④ 余切函数. $y=\cot x$ 的定义域为$(k\pi,(k+1)\pi)(k\in\mathbf{Z})$,值域为$(-\infty,+\infty)$,是以 π 为周期的周期函数,在有定义的区间上单调减少,如图 1-18 所示.

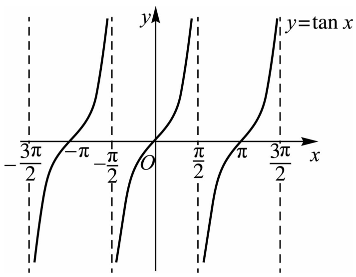

图 1-17

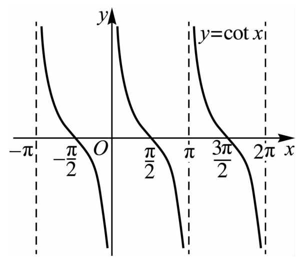

图 1-18

⑤ 正割函数和余割函数. $y=\sec x$,$y=\csc x$,其中 $\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$,$\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$.

(6) 反三角函数. $y=\arcsin x$,$y=\arccos x$,$y=\arctan x$,$y=\operatorname{arccot} x$ 统称为**反三角函数**.

① 反正弦函数. 正弦函数 $y=\sin x$ 在$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$上的反函数称为**反正弦函数**,记作 $y=\arcsin x$,定义域为$[-1,1]$,值域为$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$,显然 $\sin(\arcsin x)=x$,如图 1-19 所示.

② 反余弦函数. 余弦函数 $y=\cos x$ 在$[0,\pi]$上的反函数称为**反余弦函数**,记作 $y=\arccos x$,定义域为$[-1,1]$,值域为$[0,\pi]$,显然 $\cos(\arccos x)=x$,如图 1-20 所示.

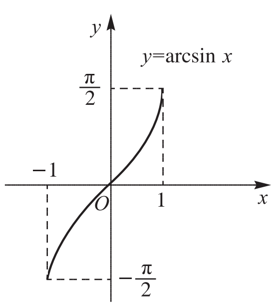

图 1-19

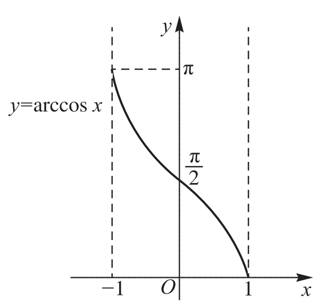

图 1-20

③ 反正切函数. 正切函数 $y=\tan x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上的反函数称为**反正切函数**,记作 $y=\arctan x$,定义域为 $(-\infty,+\infty)$,值域为 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$,显然 $\tan(\arctan x)=x$,如图 1-21 所示.

④ 反余切函数. 余切函数 $y=\cot x$ 在 $(0,\pi)$ 上的反函数叫**反余切函数**,记作 $y=\operatorname{arccot} x$,定义域为 $(-\infty,+\infty)$,值域为 $(0,\pi)$,显然 $\cot(\operatorname{arccot} x)=x$,如图 1-22 所示.

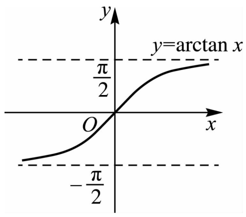

图 1-21

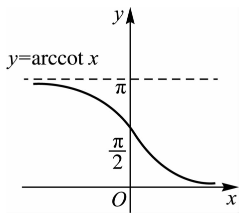

图 1-22

思考　你会用“五点法”作正弦型函数与余弦型函数的图像吗?

1.2.2　复合函数和初等函数的概念

1. 复合函数的概念

定义 1.3　设 $y=f(u)$,其中 $u=\varphi(x)$,且函数 $u=\varphi(x)$ 的值域包含在函数 $y=f(u)$ 的定义域内,则称 $y=f[\varphi(x)]$ 为由 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的**复合函数**,其中 u 叫作中间变量.

关于复合函数有如下几点说明.

(1) 复合函数的定义可以推广到多个中间变量的情形.

(2) 将一个较复杂的函数分解为若干个简单函数时,一定要分清层次,由外到内逐层分解.

(3) 并不是任意两个函数都能构成复合函数. 例如,$y=\arcsin u$ 和 $u=x^2+5$ 就不能构成复合函数. 因为当 $x\in(-\infty,+\infty)$ 时,$u=x^2+5\geqslant 5$,此时 $y=\arcsin u$ 无定义.

例 1-9　指出下列函数由哪些简单函数复合而成.

(1) $y=\sqrt[3]{(1+2x)^2}$;　　(2) $y=3^{\tan^2 x}$.

解　(1) $y=\sqrt[3]{(1+2x)^2}$ 可以看作由 $y=u^{\frac{2}{3}}$,$u=1+2x$ 复合而成.

(2) $y=3^{\tan^2 x}$ 可以看作由 $y=3^u$,$u=v^2$,$v=\tan x$ 复合而成.

注意　能否正确分析复合函数的构成直接决定了能否熟练掌握微积分的方法和技巧.

2. 初等函数的概念

由基本初等函数经过有限次四则运算和复合运算而得到的,并且可以用一个解析式表示的函数,称为**初等函数**. 例如,$f(x)=x\sin x$,$f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$,$f(x)=e^{5x+1}\sin x$ 等都是初等函数;但分段函数一般不是初等函数,如函数 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$ 不能用一个解析式表示,故不是初等函数.

想一想

庆祝中华人民共和国成立 70 周年阅兵式展示了我国强大的军事力量，我们作为中国人很骄傲. 在鸣炮升旗环节中，70 响礼炮鸣响，那么炮弹发射的高度与发射时间用函数如何描述.

习题 1.2

1. 指出下列函数由哪些简单函数复合而成.

(1) $y = \sin(x^2 + 1)$；　　(2) $y = \ln[\sin(x+5)]$；

(3) $y = e^{\cos 2x}$；　　(4) $y = \arctan(\ln x)$.

2. 设 $f(x) = 3^x$，$g(x) = \sqrt{x}$，求：

(1) $f[g(x)]$；　　(2) $g[f(x)]$.

3. 选择题.

(1) $\arccos \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 的值为（　　）.

A. $\dfrac{\pi}{6}$　　B. $\dfrac{\pi}{3}$　　C. $\dfrac{\pi}{4}$　　D. $\dfrac{\pi}{2}$

(2) $y = \arcsin 2x$ 的反函数为（　　）.

A. $y = 2\sin x$　　B. $y = \dfrac{\sin x}{2}$　　C. $y = \sin 2x$　　D. $y = \sin \dfrac{x}{2}$

1.3　应用示例——椅子能否在不平的地面放稳

1.3.1　问题提出

当把一把椅子放在不平的地面上时，通常只有三只椅脚着地，然而只需稍微转动一定的角度，就可以使四只椅脚同时着地，即放稳了. 怎样用数学模型来描述和证明这个实际问题呢?

1.3.2　模型假设

为了能用数学语言进行描述，需要对椅子和地面做一些必要的假设.

假设 1　对椅子的假设.

椅子的四条腿一样长，将椅脚与地面的接触处视为一个点，则四只椅脚的连线呈正方形.

假设 2　对地面的假设.

地面的高度是连续变化的，可视为数学上的连续曲面.

假设 3　对椅子和地面关系的假设.

地面是较为平坦的，使得椅子在任何时候都有三只椅脚同时着地.

1.3.3 模型建立

1. 引入函数

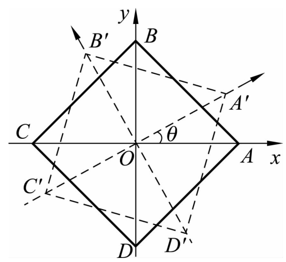

图 1-23 建立模型

如图 1-23 所示,以正方形 $ABCD$ 的中心 O 为原点建立平面直角坐标系,用 θ 表示椅子转动的角度,从而确定椅子的位置.椅脚着地,即椅脚与地面的距离为零,这就是椅子与地面的数量关系.因此,可以用 θ 的函数表示椅脚与地面的距离,因为图形具有对称性,故不必用四个函数,而只用两个函数[设 $f(\theta)$ 表示椅脚 A 和 C 到地面的距离之和,设 $g(\theta)$ 表示椅脚 B 和 D 到地面的距离之和]即可.

2. 函数的性质

(1) 由假设 2 可知,函数 $f(\theta)$ 与 $g(\theta)$ 是 θ 的非负连续函数,$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$.

(2) 由假设 3 可知,对任意 $\theta\in[0,2\pi]$,$f(\theta)g(\theta)=0$,不妨设 $f(\theta)>0$,$g(\theta)=0$.

(3) 当把椅子转动 $\frac{\pi}{2}$ 时,AC 与 BD 互换了位置,由假设 1 可知

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=g(0)$$

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right)=f(0)$$

3. 把问题转化为数学命题

椅子的四只椅脚同时着地等价于存在一点 θ_0,使 $f(\theta_0)=g(\theta_0)=0$.因此,原问题等价于以下命题.

命题　已知函数 $f(\theta)$ 与 $g(\theta)$ 是 θ 的非负连续函数,$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$,且满足:

(1) $f(\theta)>0$,$g(\theta)=0$;

(2) 对任意 $\theta\in[0,2\pi]$,$f(\theta)g(\theta)=0$;

(3) $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=g(0)$,$g\left(\frac{\pi}{2}\right)=f(0)$.

则必存在一点 $\theta_0\in[0,2\pi]$,使 $f(\theta_0)=g(\theta_0)=0$.

1.3.4 模型求证

(1) 求证:因为 $f(\theta)>0$,$g(\theta)=0$,所以 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=g(0)=0$,$g\left(\frac{\pi}{2}\right)=f(0)>0$.

令 $h(\theta)=f(\theta)-g(\theta)$,则 $h(\theta)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上连续,且 $h(\theta)=f(\theta)-g(\theta)>0$,$h\left(\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)-g\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$.由连续函数中值定理可知,必存在一点 $\theta_0\left(0<\theta_0<\frac{\pi}{2}\right)$,使 $h(\theta_0)=0$,即 $h(\theta_0)=g(\theta_0)$.

因为 $f(\theta_0)$ 与 $g(\theta_0)$ 至少有一个为零,所以 $f(\theta_0)=g(\theta_0)=0$.

(2) 模型的解的意义:在满足三点假设的前提下,证明了通过转动椅子,必定可使其在地面上放稳,而且转动(顺时针或逆时针)的角度不会超过 90°.

1.4　数学实验一:利用 MATLAB 作基本运算与绘制函数图像

1.4.1　实验任务

(1) 熟悉数学软件 MATLAB 的界面、基本功能和基本操作.
(2) 学习利用数学软件 MATLAB 进行基本运算.
(3) 学习利用数学软件 MATLAB 绘制函数图像.

1.4.2　实验过程

1. 数学软件 MATLAB 简介

数学软件 MATLAB 是美国 MathWorks 公司开发的一款商业数学软件,具有强大的功能,主要用于算法开发、数据可视化、数据分析及数值计算,将人们从烦琐的手工计算中彻底解放出来.下面以 MATLAB R2013b 版本为例介绍 MATLAB 的基本操作.

1) 软件的启动与运行

安装完 MATLAB 软件并激活后,该软件会在"开始"菜单中创建快捷方式.执行"开始"→"所有程序"→MATLAB→R2013b→MATLAB R2013b 命令,运行 MATLAB 软件,进入其主界面,如图 1-24 所示.

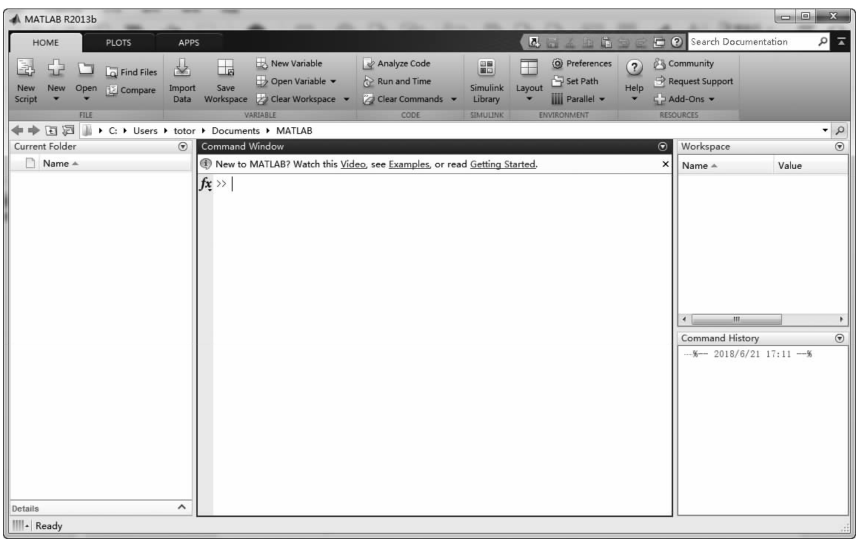

图 1-24

该界面主要由标题栏、选项区、功能区、工具栏、导航窗格(Current Folder)、命令窗口(Command Window)、工作空间(Workspace)、命令历史(Command History)、状态栏等组成.

(1) 标题栏.标题栏位于窗口的最上方,主要显示软件的名称以及"最小化"按钮、"最大

化 / 还原”按钮、“关闭”按钮等.

(2) 选项区. 选项区包括 3 个选项卡，分别是主页(HOME)、绘制(PLOTS) 和应用(APPS)，每个选项卡下面包含多个功能区，是 MATLAB 软件众多功能的“集散地”.

(3) 功能区. 功能区分散在各个选项卡下，是众多命令的集合，用于实现不同的功能操作.

(4) 工具栏. MATLAB窗口中的工具栏分别位于两个位置，与选项区同行显示的是快速工具栏，其中包括一些比较常用的按钮，如“保存”按钮、“剪切”按钮、“复制”按钮、“撤销”按钮等；位于功能区下方的是常规工具栏，主要包括“后退”(Back)按钮、“前进”(Forward)按钮、“上一级”(Up One Level)按钮、“浏览”(Browse for folder)按钮、地址栏等.

(5) 导航窗格. 该窗格中显示的是目录层级.

(6) 命令窗口. 该窗口是工作主窗口，用于程序的输入和执行结果的显示.

(7) 工作空间. 该窗口存放着图片的数组信息.

(8) 命令历史. 该窗格中显示了所有命令的输入和执行历史记录.

2) 输入与输出

启动 MATLAB 软件后，可以通过键盘在命令窗口中输入程序和命令，然后按 Enter 键，系统自动运算并输出结果. 例如，计算“2＋3”，可以直接在命令窗口中输入“2＋3”，然后按 Enter 键，即可得到计算结果，如图 1-25 所示.

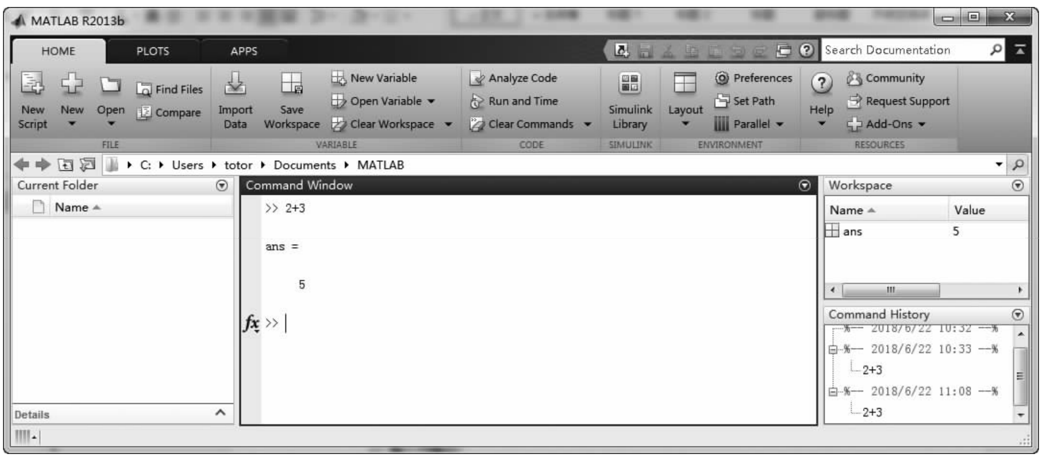

图 1-25

2. 基本运算

在 MATLAB 中，和、差、积、商、乘方运算分别用＋、－、* 、/、^ 来表示，其运算顺序与一般运算规则一致，即先乘方，后乘除，最后是加减. 要改变次序可以使用小括号“()”.

操作实例 1　计算$[4+2\times(5-1)]\div 2^2$.

在命令窗口中输入：

```
>> (4 + 2 * (5 - 1))/2^2
```

按 Enter 键，得到如下计算结果.

```
ans =
     3
```

3. 绘制函数图像

1）相关命令

在 MATLAB 中绘制二维曲线函数图形的命令，最基本的是 plot 和 fplot，其命令说明如表 1-1 所示.

表 1-1

命　令	说　明
plot(x,y)	绘制函数 $y=f(x)$ 的图像
fplot('fun',[a,b])	在区间$[a,b]$上绘制函数 fun（函数表达式）的图像

注意　fplot 命令必须已知函数解析式才能作图，而 plot 命令则可以对任何数据(x,y)作图.

2）操作实例

操作实例 2　在同一个坐标系下做出两条曲线 $y=\sin(x+1)$ 和 $y=\cos x+1$ 在区间$[0,2\pi]$上的图像.

解法 1　运行 MATLAB，在命令窗口中输入：

```
>> fplot('[sin(x + 1),(cos(x) + 1)]',[0,2 * pi])
```

按 Enter 键，弹出如图 1-26 所示的图像窗口.

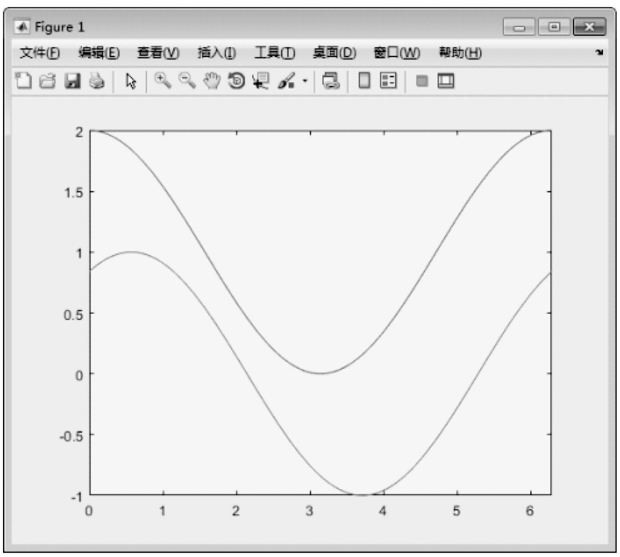

图 1-26

解法 2　在命令窗口中输入：

```
>> x = 0:0.01:2 * pi;                    % 在 x 轴的区间[0,2π]上每隔 0.01 间隔取 x 点
plot(x,sin(x + 1),'g',x,(cos(x) + 1),'b')
                                         % 用绿色绘制 y = sin(x+1) 图形，用蓝色绘制
                                           y = cos x+1 图形(默认颜色为红色和蓝色)
```

按 Enter 键后,弹出如图 1-27 所示的图像窗口.

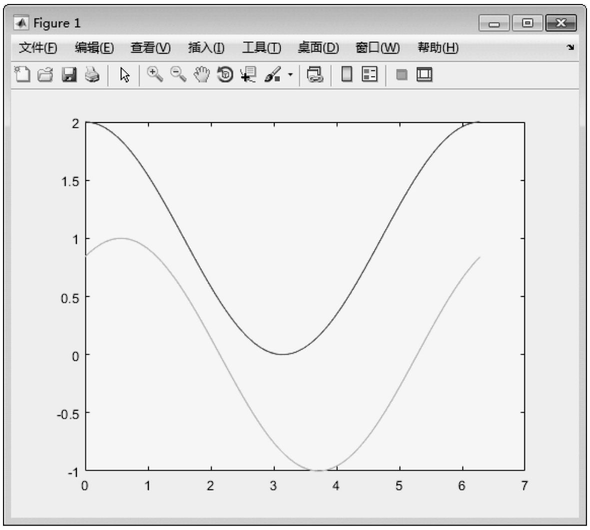

图 1-27

从图 1-26 和图 1-27 可以看出,图像上并没有显示出图例. 如果想显示图例,既可以在弹出的图像窗口中通过相应菜单进行设置,也可以通过 legend 命令实现. 在命令窗口中继续输入:

```
>> legend('y = sin(x + 1)','y = cos(x) + 1')
```

按 Enter 键后,即可发现图像窗口中增加了相应的图例,如图 1-28 所示.

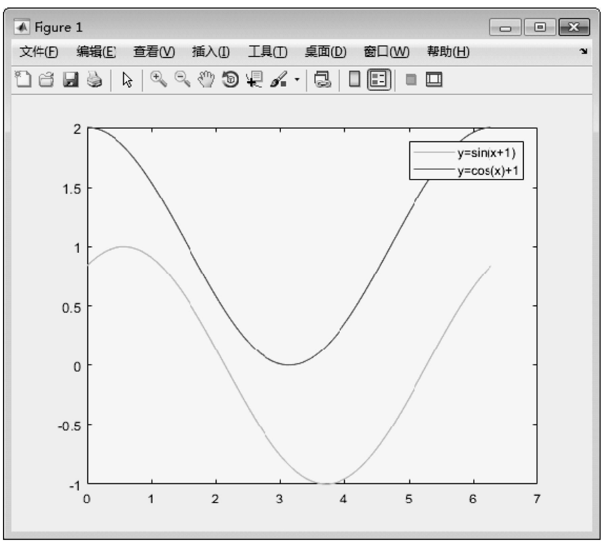

图 1-28

操作实例 3 将屏幕窗口分成 4 部分,用 subplot(m,n,k) 命令画 4 个子图,分别如下.

(1)$y = 5x^4 - 3x^2 + 2x - 7, x \in [-5,5]$.

(2)$y = |x^2 - 4x + 2|, x \in [-1,5]$.

(3)$y = \ln(1 + \sqrt{1 + x^2}), x \in [-3,3]$.

(4)$y = x^2 \cdot e^{-2x^2}, x \in [-3,3]$.

解　在命令窗口中输入：

```
>> subplot(2,2,1),fplot('5*x^4 - 3*x^2 + 2*x - 7',[-5,5])
>> subplot(2,2,2),fplot('abs(x^2 - 4*x + 2)',[-1,5])
>> subplot(2,2,3),fplot('log(1 + sqrt(1 + x^2))',[-3,3])
>> subplot(2,2,4),fplot('x^2*exp(-2*x^2)',[-3,3])
```

按 Enter 键，弹出如图 1-29 所示的窗口.

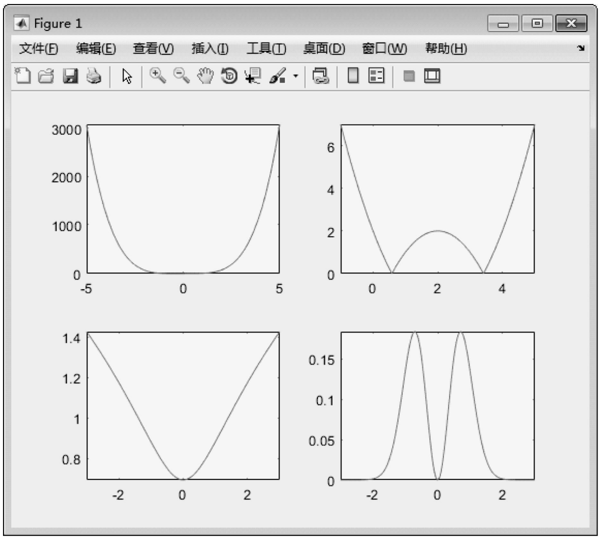

图 1-29

注意　默认情况下，窗口中的四个图像并不显示图像的标题，如果需要显示，可以自行在图像窗口中通过相应菜单添加. 另外，subplot(m,n,k) 命令表示将屏幕窗口分成 $m\times n$ 个窗口的第 k 个窗口，窗口顺序为：由左至右，由上到下.

1.4.3　实验作业

1. 完成下列表达式的运算.

(1) $\left(2+3\sin\frac{\pi}{6}\right)\div 3.25^2$；　　(2) $\log_5 2$.

2. 做出下列函数的图像.

(1) $f(x)=2x^3-3x+1, x\in[-1,2]$；　　(2) $g(x)=\dfrac{\sin x}{x}$.

复习题 1

1. 选择题.

(1) 函数 $f(x)=\sqrt{2^x-1}+\dfrac{1}{x-2}$ 的定义域为(　　).

A. $[0,2)$　　B. $(2,+\infty)$

C. $(0,2)\cup(2,+\infty)$　　D. $[0,2)\cup(2,+\infty)$

(2) 函数 $y=(2m-1)x+b$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数,则(　　).

A. $m>\frac{1}{2}$　　B. $m<\frac{1}{2}$　　C. $m>-\frac{1}{2}$　　D. $m<-\frac{1}{2}$

(3) 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,且当 $x>0$ 时,$f(x)=\frac{1}{x}+x^2$,则 $f(-1)=$(　　).

A. -2　　B. 0　　C. 1　　D. 2

2. 填空题.

(1) 函数 $y=\sqrt{3-2x-x^2}$ 的定义域是________.

(2) 已知 $f(\sqrt{x}+1)=x+2\sqrt{x}$,则 $f(x)=$________.

(3) 函数 $f(x)=4-2\cos\frac{1}{3}x$ 的最小值是______;$f(x)$ 取得最小值时,x 的值为______.

(4) 若 $f(x)=\begin{cases}1-x, & x\geqslant 0\\ 2^x, & x<0\end{cases}$,则 $f(3)=$______.

3. 设 $f(x)=\begin{cases}2^x, & -1<x<0\\ 2, & 0\leqslant x<1\\ x-1, & 1\leqslant x\leqslant 3\end{cases}$,求 $f(2)$,$f\left(\frac{1}{2}\right)$,$f\left(-\frac{1}{2}\right)$.

4. 下列函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是否相同?

(1) $f(x)=\frac{x-1}{x^2-1}$,$g(x)=\frac{1}{x+1}$;

(2) $f(x)=\sqrt{(1-x)^2}$,$g(x)=1-x$;

(3) $f(x)=x$,$g(x)=\ln e^x$.

5. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\frac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$;　　(2) $y=\ln(x^2-1)+\arcsin\frac{1}{x+1}$.

6. 对于下列函数 $f(x)$ 与 $g(x)$,求复合函数 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$,并确定它们的定义域.

(1) $f(x)=\sqrt{x+1}$,$g(x)=x^4$;

(2) $f(x)=\sqrt{1-x}$,$g(x)=\sqrt{x-1}$.

7. 求下列函数的反函数.

(1) $y=1+\log_4 x$;　　(2) $y=\frac{2^x}{2^x+1}$.

8. 已知 $f(x-1)=x^2+x+1$,求 $f\left(\frac{1}{x-1}\right)$.

9. 设 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$,对于任意 x,y 都有

$$f(x+y)+f(x-y)=f(x)f(y)$$

且 $x\neq 0$ 时 $f(x)\neq 0$. 证明 $f(x)$ 为偶函数.

10. 某单位有汽车一辆，一年中的税款、保险费及司机工资等支出共为 a，另外，行驶单位路程需油费 b. 试写出一年中平均每公里费用 y 与行驶路程 x 的函数关系式.

11. 一物件由静止开始做直线运动，前 10 s 内做匀加速运动，加速度为 $2\ cm/s^2$，10 s 后做匀速运动，运动开始时路程为零. 试建立路程 s 与时间 t 之间的函数关系.

思政小课堂

李善兰，原名李心兰，字竟芳，号秋纫，别号壬叔，浙江海宁人，是近代著名的数学家、天文学家. 李善兰在数学研究方面的成就主要有尖锥术、垛积术和素数论三项.

尖锥术理论主要见于《方圆阐幽》《弧矢启秘》《对数探源》三部著作，当时解析几何与微积分学尚未传入中国. 李善兰创立的“尖锥”概念，是一种处理代数问题的几何模型，他对“尖锥曲线”的描述实质上相当于给出了直线、抛物线、立方抛物线等方程.

垛积术理论主要见于《垛积比类》，这是有关高阶等差级数的著作. 李善兰从研究中国传统的垛积问题入手，取得了一些相当于现代组合数学中的成果. 著名的“李善兰恒等式”也出自该书.

素数论主要见于《考数根法》，这是中国素数论方面最早的著作. 在判别一个自然数是否为素数时，李善兰证明了著名的费马素数定理，并指出了它的逆定理不真.

在把西方近代物理学知识翻译为中文的传播工作中，李善兰做出了重大贡献. 他的译书也对中国近代物理学的发展起了启蒙作用. 同治七年，李善兰到北京担任同文馆天文、算学部长，执教达 13 年之久，为造就中国第一代科学人才做出了贡献，为近代科学在中国的传播和发展做出了开创性的贡献.

李善兰一生翻译西方科技书籍甚多，将近代科学最主要的几门知识从天文学到植物细胞学的最新成果介绍传入中国，对促进近代科学的发展做出卓越贡献.