服务热线：400-615-1233
配套精品教学资料包
www.huatengedu.com.cn

经济数学

JINGJI SHUXUE

责任编辑：任肖琳

封面设计：新视点 010-59493695

ISBN 978-7-5635-2950-6

9 787563 529506 02 >

定价：33.00元

高等职业教育精品教材

经济数学

北京邮电大学出版社

X-A

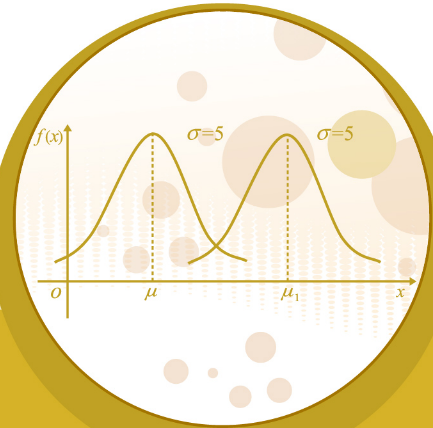
高等职业教育精品教材

“互联网＋” 创新型教材

经济数学

JINGJI SHUXUE

季　霏◎主编



- 将“互联网+”思维融入教材
- 纸质教材与数字资源有机整合
- 通过扫描书中二维码呈现
- 移动微课程，随时随地学

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

高等职业教育精品教材

"互联网+"创新型教材

经济数学

主　编　季　霏

副主编　臧文琼　张晓倩　高小龙

北京邮电大学出版社

www.buptpress.com

内 容 简 介

本书是根据教育部制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》和经济类、管理类专业对数学课程的要求编写而成的。全书全部内容包括：函数、极限与连续，一元函数的导数与微分，微分中值定理及导数的应用，一元函数积分及其应用，线性代数初步，概率论初步等。

本书可作为高职高专院校经管类各专业的经济数学教材，也可供相关人士参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

经济数学/季霏主编．--北京：北京邮电大学出版社，2012.4(2024.9 重印)

ISBN 978-7-5635-2950-6

Ⅰ.①经… Ⅱ.①季… Ⅲ.①经济数学—高等职业教育—教材 Ⅳ.①F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 058824 号

策划编辑：时虎平 **责任编辑：**任肖琳 **封面设计：**新视点设计

出版发行：北京邮电大学出版社

社 址：北京市海淀区西土城路 10 号

邮政编码：100876

发 行 部：电话：010-62282185 传真：010-62283578

E-mail：publish@bupt.edu.cn

经 销：各地新华书店

印 刷：三河市骏杰印刷有限公司

开 本：787 mm×960 mm 1/16

印 张：12.25

字 数：233 千字

版 次：2012 年 4 月第 1 版

印 次：2024 年 9 月第 9 次印刷

ISBN 978-7-5635-2950-6 定 价：33.00 元

出版说明

高等职业教育作为我国高等教育的重要组成部分，承担着培养高素质技术、技能型人才的重任。近年来，在国家和社会的支持下，我国的高等职业教育取得了不小的成就，但随着我国经济的腾飞，高技能人才的缺乏越来越成为影响我国经济进一步快速健康发展的瓶颈。这一现状对于我国高等职业教育的改革和发展而言，既是挑战，更是机遇。

要加快高等职业教育改革和发展的步伐，就必须对课程体系和教学模式等问题进行探索。在这个过程中，教材的建设与改革无疑起着至关重要的基础性作用，高质量的教材是培养高素质人才的保证。高等职业教育教材作为体现高等职业教育特色的知识载体和教学的基本工具，直接关系到高等职业教育能否为社会培养并输送符合要求的高技能人才。

为促进高等职业教育的发展，加强教材建设，教育部在《关于全面提高高等职业教育教学质量的若干意见》中，提出了“重点建设好 3 000 种左右国家规划教材”的建议和要求，并对高等职业教材的修订提出了一定的标准。为了顺应当前我国高等职业教育的发展潮流，推动高等职业教材的建设，我们精心组织了一批具有丰富教学和科研经验的人员成立了编审委员会。

编审委员会依据教育部制定的《高职高专教育基础课程教学基本要求》和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》，调研了百余所具有代表性的高等职业技术学院和高等专科学校，广泛而深入地了解了高职高专的专业和课程设置，系统地研究了课程的体系结构，同时充分汲取各院校在探索培养应用型人才方面取得的成功经验，并在教材出版的各个环节设置专业的审定人员进行严格审查，从而确保了整套教材“突出行业需求，突出职业的核心能力”的特色。

本套教材的编写遵循以下原则：

(1) 成立教材编审委员会，由编审委员会进行教材的规划与评审。

(2) 按照人才培养方案以及教学大纲的需要，严格遵循高职院校各学科的专业规范，同时最大程度地体现高等职业教育的特点及时代发展的要求。因此，本套教材非常注重培养学生的实践技能，力避传统教材“全而深”的教学模式，将“教、学、做”有机地融为一体，在教给学生知识的同时，强化了对学生实际操作能力的培养。

(3) 教材的定位更加强调“以就业为导向”，因此也更为科学。教育部对我国的高等职业教育提出了“以应用为目的，以必需、够用为度”的原则。根据这一原则，本套教材在编写过程中，力求从实际应用的需要出发，尽量减少枯燥、实用性不强的理论灌输，充分体现出“以行业为向导，以能力为本，以学生为中心”的风格，从而使本套教材更具实用性和前瞻性，与就业市场结合也更为紧密。

(4) 采用“以案例导入教学”的编写模式。本套教材力图突破陈旧的教育理念，在讲解的过程中，援引大量鲜明实用的案例进行分析，紧密结合实际，以达到编写实训教材的目标。这些精心设计的案例不但可以方便教师授课，同时又可以启发学生思考，加快对学生实践能力的培养，改革人才的培养模式。

本套教材涵盖了公共基础课系列、财经管理系列、物流管理系列、电子商务系列、旅游系列、计算机系列、电子信息系列、机械系列、汽车系列和化学化工系列的主要课程。

对于教材出版及使用过程中遇到的各种问题，欢迎及时与我们取得联系。同时，我们希望有更多经验丰富的教师加入到我们的行列当中，编写出更多符合教学需要的高质量教材，为我国的高等职业教育作出积极的贡献。

编审委员会

前言

为了适应高职高专教育发展的需要，满足高职高专教育高素质应用型人才培养目标的要求，进一步提高教学质量，我们根据教育部制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》，依据经济类、管理类专业对数学课程的要求，广泛吸收各高职高专院校经济数学教学改革的经验和成果编写了本书。

随着社会经济的迅猛发展，社会中各个行业及高校的各个专业都对数学应用能力提出了新的更高的要求，注重学生用数学的意识、培养学生用数学的能力显得更加紧迫和重要。因而，在本书的编写过程中，从典型的经济问题和自然科学的实际例子出发，深入浅出，引出基本的概念，然后运用一些系统化的方法和结果解决更多的经济问题。本书拓展了经济应用实例的范围，让学生更多地接触应用数学知识、数学方法解决经济管理问题的实例，增强学生的应用意识和能力。

本教材主要具有以下两方面的特点。

(1)必需够用，淡化理论。数学知识的覆盖面不宜太宽，不追求数学自身的系统性、严密性和逻辑性，略去相关的数学证明和推导，力求突出重点，达到“透过数学看经济”的学习目标。

(2)专业结合，应用为主。将数学基本知识与经济的综合应用有机地融合在一起，体现数学知识专业化、经济问题数学化，尽可能用数学知识解释经济现象，用数学方法解决经济问题，使“教、学、用”融为一体，体现了教育部教学改革的精神。

通过本教材的学习，可以使学生掌握基本概念、基本理论和基本方法；培养学生的运算能力、抽象思维能力和逻辑推理能力，使学生学到从事经济工作应具备的基本数学知识；培养学生利用数学的思想、方法将经济实际转化为数学模型以及求解数学模型的能力；为后续专业课程的学习奠定良好的数学基础。

本教材内容包括函数、极限与连续，一元函数的导数与微分，微分中值定理

及导数的应用,一元函数积分及其应用,线性代数初步,概率论初步等。

本教材第一章、第二章由臧文琼编写,第三章、第四章由张晓倩编写,第五章由高小龙编写,第六章及附录部分由季霏编写。

最后,衷心地希望广大读者对书中的不足之处给予批评与指正。

编　者

目录

第一章　函数、极限与连续

函数是高等数学中最重要的基本概念之一，也是微积分学研究的主要对象；极限是微积分学研究的基本工具，贯穿高等数学的始终；连续是函数的一个重要性态. 本章通过简要复习函数的基本知识，学习极限与连续的概念，掌握极限的运算，为进一步学习微积分知识奠定基础.

第一节　函　　数

函数是微积分研究的对象，中学数学应用“集合”与“对应”已经给出了函数概念，并在此基础上讨论了函数的一些简单性质. 在这里除对中学数学的函数及其性质重点复习外，根据需要将对函数作进一步讨论.

一、函数的概念与性质

1. 函数的概念

在实际问题中，经常会遇到两类不同的量：一类在所考察的过程中不发生变化，只取一个固定的值，称为**常量**；另一类在所考察的过程中是变化的，可以取不同数值，称为**变量**.

实际问题中的诸变量之间往往是相互联系的，一个变量随另一个变量的变化而变化，这种关系通常表现为变量取值的对应关系，即函数关系.

引例　某名品鞋店出售某名牌鞋的单价为 500 元/双. 显然

销 售 量	销售收入
1 双	500 元
2 双	1 000 元
3 双	1 500 元
…	…

分析　对于集合 $A=\{1,2,3,\cdots\}$ 中任一值，按照乘以 500 的法则，在集合 $B=\{500,1\ 000,1\ 500,\cdots\}$ 中有唯一一个值与它对应. 如果用 x 表示 A 中的任一值，y 表

示 B 中相对应的值，则根据乘以 500 的法则知，$y=500x$，它反映了实际问题中销售量 x 与销售收入 y 之间的函数关系. 一般地，有如下定义.

定义 1 设 x 和 y 是两个变量，D 是给定的非空数集，如果变量 x 在 D 内任取一个确定的数值时，变量 y 按照一定的法则 f 都有唯一确定的数值与之对应，则称变量 y 是变量 x 的**函数**，记为

$$y=f(x),x\in D,$$

其中变量 x 称为**自变量**，变量 y 称为**因变量**（或**函数**），数集 D 称为函数的**定义域**，f 称为函数的**对应法则**.

当 x 取确定数值 $x_0\in D$ 时，通过法则 f，函数有唯一确定的值 y_0 与之相对应，称 y_0 为函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的**函数值**，记为

$$y_0=y\Big|_{x=x_0}=f(x_0).$$

由全体函数值构成的集合称为函数的**值域**，记为 M，即 $M=\{y|y=f(x),x\in D\}$.

由函数的定义可以看出，定义域和对应法则是确定函数的两个必不可少的要素，也就是说，如果两个函数的对应法则和定义域都相同，那么这两个函数就是相同的函数.

在实际问题中，函数的定义域是根据问题的实际意义确定的，如引例中，函数 $y=500x$ 的定义域为 $A=\{1,2,3,\cdots\}$. 若不考虑函数的实际意义，而抽象地研究函数，则规定函数的定义域是使其表达式有意义的一切实数组成的集合，一般考虑以下几个方面：

（1）分式函数的分母不能为零；

（2）偶次根式的被开方式必须大于等于零；

（3）对数函数的真数必须大于零；

（4）三角函数与反三角函数要符合其定义；

（5）如果函数表达式中含有上述几种函数，则应取各部分定义域的交集.

例 1 求下列函数的定义域.

（1）$f(x)=\sqrt{25-x^2}$； （2）$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{3-x}}+\ln(2x+4)$.

解 （1）由 $25-x^2\geqslant 0$，得 $-5\leqslant x\leqslant 5$，所以函数的定义域为 $[-5,5]$.

（2）因为 $\begin{cases}3-x>0,\\2x+4>0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x<3,\\x>-2,\end{cases}$ 所以函数的定义域为 $(-2,3)$.

2. 函数的性质

设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义（区间 I 为函数 $f(x)$ 的整个定义域或其定义域的一部分），则函数一般具有下列几种特性.

1）有界性

定义 2　如果存在正数 M，使对任意的 $x\in I$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上**有界**；否则，称 $f(x)$ 在区间 I 上**无界**.

例如，$y=\cos x$ 在其定义域内是有界的.

2）单调性

定义 3　若对任意的 $x_1,x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$（或 $f(x_1)>f(x_2)$），则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上**单调增加**（或**单调减少**）. 区间 I 称为**单调增区间**（或**单调减区间**）；单调增加函数和单调减少函数统称为**单调函数**；单调增区间和单调减区间统称为**单调区间**.

例如，$y=x^2$ 在 $[0,+\infty)$ 上是单调增加的，在 $(-\infty,0]$ 上是单调减少的，在 $(-\infty,+\infty)$ 上不是单调函数.

3）奇偶性

定义 4　设区间 I 关于原点对称，若对任意的 $x\in I$，都有 $f(-x)=f(x)$，则称函数 $f(x)$ 是区间 I 上的**偶函数**；若对任意的 $x\in I$，都有 $f(-x)=-f(x)$，则称函数 $f(x)$ 是区间 I 上的**奇函数**；若函数既不是奇函数也不是偶函数，则称为**非奇非偶函数.**

例如，$y=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是偶函数，$y=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是奇函数，$y=\sin x+\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是非奇非偶函数.

4）周期性

定义 5　如果存在不为零的实数 T，使得对于任意的 $x\in I$，$x+T\in I$，都有 $f(x+T)=f(x)$，则称函数 $y=f(x)$ 是**周期函数**，T 是 $y=f(x)$ 的一个**周期**. 通常所说的周期函数的周期是指它的**最小正周期**.

例如，$y=\cos x$ 是以 2π 为周期的周期函数；$y=\tan x$ 是以 π 为周期的周期函数.

二、反函数与复合函数

1. 反函数

定义 6　设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 M. 如果对于 M 中的每个数 y，在 D 中都有唯一确定的数 x 与之对应，且使 $y=f(x)$ 成立，则确定了一个以 y 为自变量，x 为因变量的函数，称为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**，记为 $x=f^{-1}(y)$，其定义域为 M，值域为 D.

由于习惯上用 x 表示自变量，用 y 表示因变量，因此将反函数中 x 与 y 互换位置，即记为 $y=f^{-1}(x)$，$x\in M$.

在同一坐标系中，函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$

对称.

例如,引例中函数 $y=500x$ 的反函数为 $y=\frac{1}{500}x$,其定义域为$\{500,1\ 000,1\ 500,\cdots\}$,值域为$\{1,2,3,\cdots\}$.

2. 复合函数

定义 7 设 $y=f(u)$,其中 $u=\varphi(x)$,且函数 $u=\varphi(x)$的值域包含在函数 $y=f(u)$的定义域内,则称 $y=f[\varphi(x)]$为由 $y=f(u)$与 $u=\varphi(x)$复合而成的**复合函数**,其中 u 称为**中间变量**.

例如,$y=\sqrt{u}$,$u=2+\sin x$ 可复合成 $y=\sqrt{2+\sin x}$.

复合函数还可以有多个中间变量,如 $y=e^u$,$u=\sqrt{v}$,$v=x+1$ 复合成函数 $y=e^{\sqrt{x+1}}$,这里 u,v 都是中间变量.

注意 并不是任意两个函数都能构成复合函数. 例如,$y=\arcsin u$ 和 $u=x^2+5$ 就不能构成复合函数. 因为当 $x\in(-\infty,+\infty)$时,$u=x^2+5\geqslant5$,此时 $y=\arcsin u$ 无定义.

例 2 指出下列函数是由哪些简单函数复合而成?

(1) $y=(1+2x)^2$; (2) $y=3^{\tan^2 x}$; (3) $y=\arctan 2^{\sqrt{x}}$.

解 (1) $y=(1+2x)^2$ 可以看做由 $y=u^2$,$u=1+2x$ 复合而成.

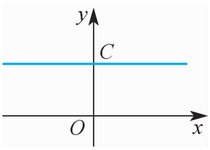
(2) $y=3^{\tan^2 x}$可以看做由 $y=3^u$,$u=v^2$,$v=\tan x$ 复合而成.

(3) $y=\arctan 2^{\sqrt{x}}$可以看做由 $y=\arctan u$,$u=2^v$,$v=\sqrt{x}$复合而成.

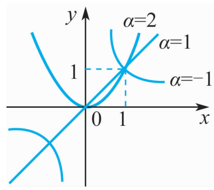
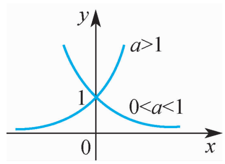
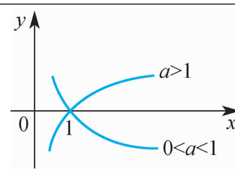
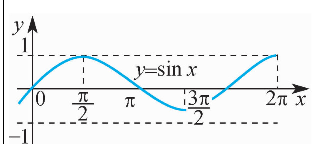
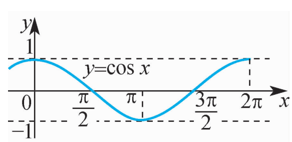
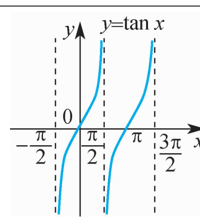
三、初等函数

常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称为**基本初等函数**. 为后面学习方便起见,现将这六类基本初等函数的表达式、定义域、值域、图形、性质等列表表示出来(见表 1-1).

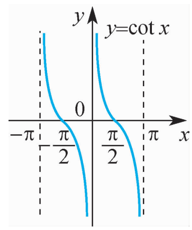
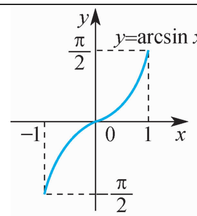
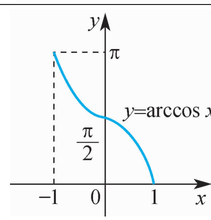
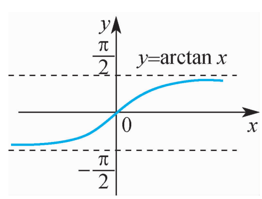
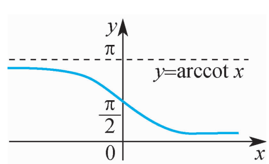
表 1-1

函　　数	定义域和值域	图　　形	性　　质
常数函数 $y=C$ (C 为常数)	$x\in(-\infty,+\infty)$		有界、偶函数

续表

函　　数	定义域和值域	图　　形	性　　质
幂函数 $y=x^{\alpha}$（α 为实数）	定义域由 α 的取值决定，但在 $(0,+\infty)$ 内都有定义		在第一象限内，当 $\alpha>0$ 时，单调增加；当 $\alpha<0$ 时，单调减少
指数函数 $y=a^{x}$（$a>0$，且 $a\neq1$，a 为常数）	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		过点 $(0,1)$，在 x 轴上方．当 $0<a<1$ 时，单调减少；当 $a>1$ 时，单调增加
对数函数 $y=\log_a x$（$a>0$，且 $a\neq1$，a 为常数）	$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		过点 $(1,0)$，在 y 轴右边．当 $0<a<1$ 时，单调减少；当 $a>1$ 时，单调增加
三角函数　正弦函数 $y=\sin x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		过原点，奇函数，有界，周期为 2π，在 $\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$ 内单调增加，在 $\left[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right]$ 单调减少（$k\in\mathbf{Z}$）
三角函数　余弦函数 $y=\cos x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		偶函数，有界，周期为 2π，在 $[2k\pi-\pi,2k\pi]$ 内单调增加，在 $[2k\pi,2k\pi+\pi]$ 内单调减少（$k\in\mathbf{Z}$）
三角函数　正切函数 $y=\tan x$	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，无界，周期为 π，在 $\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加（$k\in\mathbf{Z}$）

续表

函　数		定义域和值域	图　形	性　质
三角函数	余切函数 $y=\cot x$	$x\neq k\pi(k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，无界，周期为 π，在$(k\pi,k\pi+\pi)$内单调减少$(k\in\mathbf{Z})$
反三角函数	反正弦函数 $y=\arcsin x$	$x\in[-1,1]$ $y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$		过原点，奇函数，有界，单调增加
	反余弦函数 $y=\arccos x$	$x\in[-1,1]$ $y\in[0,\pi]$		有界，单调减少
	反正切函数 $y=\arctan x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$		过原点，奇函数，有界，单调增加
	反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,\pi)$		有界，单调减少

定义 8　由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合步骤所构成并用一个式子表示的函数，称为**初等函数**.

例如，$y=x\cos x$，$y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$，$y=e^{5x+1}\cos x$ 等都是初等函数.

四、分段函数

有时一个函数要用几个式子表示，如 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x>0, \\ x, & x\leqslant 0. \end{cases}$ 这种在自变量的不同变化范围中，对应法则用不同式子来表示的函数，通常称为**分段函数**. 但它仍旧是一个函数，而不是几个函数，这是因为它符合一个函数的定义，只不过在定义域的不同部分用不同的式子来表示而已. 在计算分段函数的函数值时，应该按对应于定义域的不同部分的不同表达式进行计算.

例 3　设函数 $f(x)=\begin{cases} 2x, & 0\leqslant x\leqslant 1, \\ 2, & 1<x\leqslant 2, \\ 3x-4, & 2<x\leqslant 3, \\ -\dfrac{5}{2}x+\dfrac{25}{2}, & 3<x\leqslant 5. \end{cases}$ 求 $f(1)$，$f(4)$及函数的定义域.

解　$f(1)=2\times 1=2$，$f(4)=-\dfrac{5}{2}\times 4+\dfrac{25}{2}=\dfrac{5}{2}$.

函数的定义域为$[0,5]$.

注意　分段函数不一定是初等函数.

五、常用的经济函数

1. 总成本函数

某商品的成本是指生产一定数量的产品所需的全部经济资源投入(劳力、原料、设备等)的价格或费用总额，可分为固定成本和变动成本两部分. **固定成本**是指在一定时期内不随产量 q 变化的那部分成本，如厂房、设备费等，记为 C_0；**变动成本**是指随产量 q 变化而变化的那部分成本，如原材料费等，记为 $C_1(q)$. 于是总成本函数的一般形式是

$$C(q)=C_0+C_1(q),$$

当产量 $q=0$ 时，对应的成本函数值 $C(0)$就是产品的固定成本值.

设 $C(q)$为成本函数，称 $\overline{C}(q)=\dfrac{C(q)}{q}$为**单位成本函数**或**平均成本函数**.

例 4　某公司生产某产品，固定成本为 2 万元，每当生产一台产品成本增加 0.3 万元，求：

(1)总成本函数，平均成本函数；

(2)当生产 100 台该产品时的总成本和平均成本.

解 (1) 设产量为 q 台,取货币单位:万元,则

总成本函数 $C(q)=2+0.3q$.

平均成本函数 $\overline{C}(q)=\dfrac{C(q)}{q}=\dfrac{2}{q}+0.3$.

(2) 产量为 100 台时的总成本为 $C(100)=2+0.3\times100=32$(万元),

平均成本为 $\overline{C}(100)=\dfrac{2}{100}+0.3=0.32$(万元).

2. 需求函数与供给函数

需求是指在一定价格条件下,消费者愿意购买并且有支付能力购买的商品量.供给是指在一定价格条件下,生产者愿意出售的商品量.决定商品的需求量和供给量的因素很多,但最重要的是商品的价格因素,如果假定其他因素为常量,仅研究价格和需求及价格和供给之间的关系,就可得到需求函数和供给函数.

需求函数表示的就是商品需求量和价格这两个经济量之间的数量关系

$$Q=Q(p),$$

其中 Q 表示需求量,p 表示价格.需求函数的反函数称为**价格函数**,记为 $p=p(Q)$,习惯上将价格函数也统称为需求函数.

常见的需求函数有以下几种类型:

(1) 线性需求函数 $Q=a-bp(a>0,b>0)$;

(2) 指数需求函数 $Q=Ae^{-bp}(A>0,b>0)$.

供给函数表示的就是商品供给量和价格这两个经济量之间的数量关系

$$S=S(p),$$

其中 S 表示供给量,p 表示价格.

常见的供给函数有以下几种类型:

(1) 线性供给函数 $S=dp-c(c>0,d>0)$;

(2) 指数供给函数 $S=Ae^{dp}(A>0,d>0)$.

一般地,需求函数是价格的单调减函数,供给函数是价格的单调增函数.

当市场上某种商品的需求量与供给量相等时,需求量与供给量持平,此时该商品市场处于平衡状态,称为**供需平衡**,这时商品的价格称为**市场平衡价格**或**均衡价格**,记为 p_0,对应的需求量称为**均衡量**,记为 Q_0.

当市场价格高于均衡价格时,供应量大于需求量,即商品供过于求,会导致商品价格下降;当市场价格低于均衡价格时,供应量小于需求量,即商品供不应求,会导致商品价格上升.

例 5 设某商品的需求函数为 $Q=a-bp(a>0,b>0)$,供给函数为 $S=dp-c(c>0,d>0)$,求均衡价格 p_0.

解　在均衡价格 p_0 处，需求量等于供给量，即 $a-bp_0=dp_0-c$，解出 p_0，得 $p_0=\dfrac{a+c}{b+d}$，所以均衡价格 p_0 为 $\dfrac{a+c}{b+d}$.

3. 收益函数和利润函数

总收益是指生产者出售一定量产品所得到的全部收入，是销售量的函数. 当产品销量为 q，价格为 p 时，收益函数的一般形式是

$$R(q)=p\cdot q.$$

如果产销平衡，即产量为 q，销量也为 q 时，利润函数的一般形式是

$$L(q)=R(q)-C(q).$$

当 $L(q)=R(q)-C(q)>0$ 时，生产者盈利；

当 $L(q)=R(q)-C(q)<0$ 时，生产者亏损；

当 $L(q)=R(q)-C(q)=0$ 时，生产者盈亏平衡，使 $L(q)=0$ 的点 q_0 称为**盈亏平衡点**（又称为**保本点**）.

例 6　已知某厂生产某种产品的总成本函数为 $C(q)=500+2q$，其中 q 为该产品的产量，如果该产品的售价为每件 6 元，求：

（1）生产 200 件该产品时的利润；

（2）生产该产品的盈亏平衡点.

解　（1）由题意知，$C(q)=500+2q$，$R(q)=6q$. 因此，利润函数为

$$L(q)=R(q)-C(q)=6q-(500+2q)=4q-500,$$

故生产 200 件该产品时的利润为

$$L(200)=4\times200-500=300(\text{元}).$$

（2）由 $L(q)=0$，即 $4q-500=0$，解得 $q=125$，故盈亏平衡点为 125 件.

随堂测试

习题 1-1

1. 下列各组函数是否是相同的函数？

（1）$y=\sin x$ 与 $y=\sqrt{1-\cos^2 x}$；　（2）$y=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ 与 $y=\ln(1+x)-\ln(1-x)$；

（3）$y=\dfrac{x^3-1}{x-1}$ 与 $y=x^2+x+1$.

2. 求下列函数的定义域.

（1）$y=\dfrac{5}{x^2+2}$；　（2）$y=\sqrt{x-1}+\dfrac{1}{x-2}+\lg(4-x)$；　（3）$y=\begin{cases}-x, & -1\leqslant x\leqslant 0,\\ \sqrt{3-x}, & 0<x<2.\end{cases}$

3. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & -2<x<0,\\ 0, & 0\leqslant x<2,\end{cases}$ 求 $f\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

4. 判断下列函数的奇偶性.

(1) $y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$;　(2) $y=\lg\frac{1+x}{1-x}$;　(3) $y=x^2-x^3$;　(4) $y=x\sin\frac{1}{x}$.

5. 求下列函数的反函数.

(1) $y=2x-3$;　(2) $y=\ln(x-1)+1$;　(3) $y=\sqrt[3]{x+1}$.

6. 下列函数是由哪些简单函数复合而成的?

(1) $y=2^{\sin x}$;　(2) $y=\ln\sin 2x$;　(3) $y=\cos^2(\sqrt{x}+1)$;　(4) $y=\arctan(\ln x)$.

7. 某商品的需求函数为 $p+3q=75$,供求函数为 $9q=2p-15$,求均衡价格.

8. 某厂生产产品 1 000 吨,定价为 130 元/吨,当售出量不超过 700 吨时,按原定价出售,超过 700 吨的部分按原价的九折出售. 试将销售收入表示成销售量的函数.

9. 设某产品每次售 10 000 件时,每件售价为 50 元,若每次多售 2 000 件,则每件相应地降价 2 元,如果生产这种产品的固定成本为 60 000 元,变动成本为每件 20 元,最低产量为 10 000 件. 试求:(1) 总成本函数;(2) 收益函数;(3) 利润函数.

10. 某厂生产一种元器件,生产能力为日产 100 件. 每日的固定成本为 150 元,每件的平均可变成本为 10 元.

(1) 求该厂此元器件的日总成本函数及平均成本函数;

(2) 若每件售价 14 元,写出收益函数;

(3) 写出利润函数并求盈亏平衡点.

第二节　极　　限

在人们的日常生活中,经常用到这样的描述:用市场变化趋势来研究产品需求量的状况;用公司发展的趋势来分析公司未来的前途等. 这种趋势用在数学上就是极限,极限可以看成是变量变化的终极状态. 本节将给出极限的概念,并研究它的性质及运算.

一、极限的概念

1. 数列的极限

定义 9　按一定顺序排列的无穷多个数 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$ 称为**数列**,简记为 $\{x_n\}$,其中 x_n 称为该数列的**通项**或**一般项**.

例如,数列

$$\{u_n\}:3,6,12,\cdots,3\cdot 2^{n-1},\cdots;$$

$$\{v_n\}:1,-1,1,-1,\cdots,(-1)^{n+1},\cdots;$$

$$\{y_n\}:\frac{1}{2},\frac{1}{2^2},\frac{1}{2^3},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots,$$

它们的通项依次为 $3\cdot 2^{n-1},(-1)^{n+1},\frac{1}{2^n}$.

数列也可看成自变量为正整数 n 的函数：$x_n=f(n)$，称为**整标函数**. 其定义域是全体正整数，当自变量 n 依次取 1，2，3，…时，对应的函数值就排成数列$\{x_n\}$.

从上述数列中容易看出，当 n 无限增大时，数列$\{u_n\}$的通项 $3\cdot 2^{n-1}$ 的值也无限增大；数列$\{v_n\}$的通项$(-1)^{n+1}$在 1 与 −1 之间交替变化，它没有一个确定的终极趋势；数列$\{y_n\}$的通项$\frac{1}{2^n}$的值无限接近于 0. 这种"当 n 无限增大时，数列的通项无限地接近于某个确定的常数 A"的现象，用数学语言描述出来就是数列的极限.

定义 10　对于数列$\{x_n\}$，若当 n 无限增大时，通项 x_n 无限接近于某个确定的常数 A，则常数 A 称为数列$\{x_n\}$的**极限**，此时也称数列$\{x_n\}$**收敛**于 A，记为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$ 或 $x_n\to A(n\to\infty)$. 若数列$\{x_n\}$的极限不存在，则称数列$\{x_n\}$**发散**.

由定义 10，显然 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$，即当 $n\to\infty$ 时，数列 $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$ 收敛；当 $n\to\infty$ 时，数列$\{(-1)^{n+1}\}$和$\{3\cdot 2^{n-1}\}$是发散的.

2. 函数的极限

数列是一种特殊形式的函数，把数列的极限推广可得到函数的极限，根据自变量的变化过程，分两种情况讨论.

1）$x\to\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限

定义 11　设函数 $y=f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$内有定义，若当$|x|$无限增大时，相应的函数值 $f(x)$ 无限接近于某一确定的常数 A，则 A 称为函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的**极限**，记为

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to\infty),$$

其中 $x\to\infty$ 表示 x 的绝对值无限增大.

若只当 $x\to+\infty$（或 $x\to-\infty$）时，函数趋近于某一确定的常数 A，记为

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A(\text{或}\lim_{x\to-\infty}f(x)=A).$$

从图 1-1 中容易看出，$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=0$，$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0$.

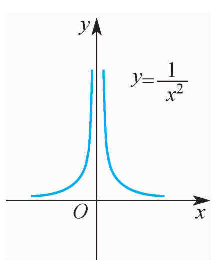


图 1-1

定理 1 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$.

2) $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限

微课

$x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限

定义 12 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域(点 x_0 可除外,即 $0<|x-x_0|<\delta$,δ 为某一正数)内有定义,当自变量 x 无限趋近于 x_0 时,函数 $f(x)$ 的值无限趋近于某一确定的常数 A,则称 A 为 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的**极限**,记为

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to x_0),$$

其中 $x\to x_0$ 表示 x 既可以从大于 x_0 的方向趋近于 x_0,也可以从小于 x_0 的方向趋近于 x_0.

在讨论当 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限问题中,对 $x\to x_0$ 的过程,若限制 $x<x_0$ 或 $x>x_0$,便引出了单侧极限的概念.

定义 13 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个左半邻域 $(x_0-\delta,x_0)$(或右半邻域 $(x_0,x_0+\delta)$)内有定义,当自变量 x 从 x_0 的左(或右)边无限趋近于 x_0 时,函数 $f(x)$ 的值无限趋近于某一确定的常数 A,则称 A 为 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的**左(或右)极限**,记为

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A(\text{或}\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A).$$

定理 2 极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$.

例 1 设 $f(x)=\begin{cases}-x, & x<0,\\ 1, & x=0,\\ x, & x>0,\end{cases}$ 求 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$,并讨论 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 是否存在.

解 由图 1-2 知, $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(-x)=0$, $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}x=0$,所以 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$.

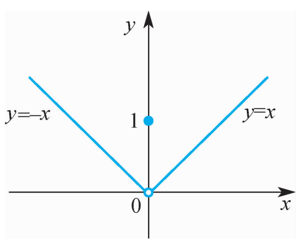


图 1-2

微课

无穷小与无穷大

二、无穷小与无穷大

1. 无穷小

定义 14 在自变量的某一变化过程中,以零为极限的变量称为该变化

过程的**无穷小量**，简称**无穷小**.

例如，因为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$，所以$\frac{1}{2^n}$为$n\to\infty$时的无穷小；因为$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0$，所以函数$\frac{1}{x^2}$为当$x\to\infty$时的无穷小. 又如，例1中的函数$f(x)$，因为$\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$，所以函数$f(x)$为当$x\to0$时的无穷小.

注意　(1) 判断是否为无穷小必须考虑变化过程，同一个变量在不同的变化过程中，情况会不同，如当$x\to0$时，x^2是无穷小，但当$x\to1$时，x^2就不是无穷小.

(2) 无穷小是个变量（零除外），不能把很小很小的量作为无穷小，如0.000 01不是无穷小. 零是可以作为无穷小的唯一的常数.

无穷小还有以下性质.

性质1　有限个无穷小的和也是无穷小.

例如，当$x\to0$时，x与$\sin x$都是无穷小，$x+\sin x$也是无穷小.

无穷多个无穷小的代数和未必是无穷小，如$\lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}\right)}_{n\text{个}}=1$.

性质2　有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

例如，当$x\to\infty$时，$\frac{1}{x^2}$是无穷小，$\arctan x$是有界函数，所以$\frac{1}{x^2}\arctan x$也是无穷小.

推论1　常数与无穷小的乘积是无穷小.

推论2　有限个无穷小的乘积也是无穷小.

无穷小与函数极限有如下关系.

定理3　函数$\lim f(x)=A$的充分必要条件是$f(x)=A+\alpha$（其中$\lim\alpha=0$）.

定理3中，下面没有标明自变量变化过程的记号"lim"是指自变量x的变化过程可以是$x\to x_0^-$，$x\to x_0^+$，$x\to\infty$，$x\to-\infty$，$x\to+\infty$中的任何一种，以后不再赘述.

例如，因为$\frac{1+x^3}{2x^3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2x^3}$，而$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{2x^3}=0$，所以$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+x^3}{2x^3}=\frac{1}{2}$.

2. 无穷大

定义15　在自变量的某一变化过程中，绝对值无限增大的变量称为该变化过程的**无穷大量**，简称**无穷大**.

显然，$n\to\infty$时，n，n^2，n^3，…都是无穷大.

注意　无穷大不趋向于任何确定的常数，所以无穷大的极限不存在. 但为了叙述函数的这一性态，也说"函数的极限是无穷大"，并记为$\lim f(x)=\infty$.

3. 无穷小与无穷大的关系

定理 4 在自变量的同一变化过程中,

(1) 如果函数 $f(x)$是无穷小,且 $f(x)\neq 0$,则$\dfrac{1}{f(x)}$是无穷大;

(2) 如果函数 $f(x)$是无穷大,则$\dfrac{1}{f(x)}$是无穷小.

例如,当 $x\to 0$ 时,x^2 是无穷小,$\dfrac{1}{x^2}$是无穷大.

微课
无穷小量阶的比较

4. 无穷小的比较

定义 16 设 α 与 β 是自变量的同一变化过程中的两个无穷小,

(1) 如果 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha}=0$,则称 β 是比 α **高阶**的无穷小,记为 $\beta=o(\alpha)$;

(2) 如果 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha}=\infty$,则称 β 是比 α **低阶**的无穷小;

(3) 如果 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha}=c(c\neq 0)$,则称 β 与 α 是**同阶**无穷小. 特别地,当 $c=1$ 时,称 β 与 α 是**等价**无穷小,记为为 $\alpha\sim\beta$.

例如,当 $x\to 0$ 时,$x,2x,x^2$ 都是无穷小,因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x=0$,所以当 $x\to 0$ 时,x^2 是比 x 高阶的无穷小;由于$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{x}=2$,所以当 $x\to 0$ 时,$2x$ 与 x 是同阶无穷小.

三、极限的性质与运算

1. 极限的性质

数列极限是函数极限的特殊情形,都可归结为在自变量的某一变化过程中,函数值无限接近于某一确定的常数,因而它们具有共同的性质. 下面以 $x\to x_0$ 的情形为例来叙述.

性质 1(唯一性) 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在,则极限值唯一.

性质 2(有界性) 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在,则在 x_0 的某一去心邻域($0<|x-x_0|<\delta$,δ 为某一正数)内函数 $f(x)$有界.

性质 3(保号性) 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,且 $A>0$(或 $A<0$),则必存在 x_0 的某一去心邻域,使得在该邻域内,函数 $f(x)>0$(或 $f(x)<0$).

推论 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,且在 x_0 的某一去心邻域内函数 $f(x)\geqslant 0$(或 $f(x)\leqslant 0$),

则 $A\geqslant 0$(或 $A\leqslant 0$).

2. 极限的四则运算法则

定理 5　设在自变量 x 的同一变化过程中,极限 $\lim f(x)$ 及 $\lim g(x)$ 都存在,则有

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)$;

(2) $\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)$;

(3) $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}(\lim g(x)\neq 0)$.

微课
利用极限的四则运算求简单的极限

法则(1)和法则(2)均可推广到有限个函数的情形.并有如下推论.

推论 1　$\lim[Cf(x)]=C\lim f(x)$(C 为常数).

推论 2　$\lim[f(x)]^n=[\lim f(x)]^n$($n$ 为正整数).

例 2　求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+3x-2)$;　(2) $\lim\limits_{x\to 1}(2+x)(3-2x)$;　(3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+2}{x^2-9}$.

解　(1) $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+3x-2)=\lim\limits_{x\to 2}x^2+\lim\limits_{x\to 2}3x-\lim\limits_{x\to 2}2=(\lim\limits_{x\to 2}x)^2+3\lim\limits_{x\to 2}x-2$

$$=2^2+3\times 2-2=8.$$

(2) $\lim\limits_{x\to 1}(2+x)(3-2x)=\lim\limits_{x\to 1}(2+x)\cdot\lim\limits_{x\to 1}(3-2x)=3$.

(3) 因为 $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-9)=-5\neq 0$,所以 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+2}{x^2-9}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 2}(x^3+2)}{\lim\limits_{x\to 2}(x^2-9)}=\dfrac{2^3+2}{2^2-9}=-2$.

注意　极限的四则运算法则要求参与运算的各个函数极限均存在,且法则(3)还必须满足分母的极限不为零;否则,不能直接使用法则.

例 3　求 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$.

解　由于 $\lim\limits_{x\to 3}(x-3)=0$,故不能直接使用法则(3)求解.在 $x\to 3$ 时,$x\neq 3$,故可约去公因子 $x-3$,得

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x+3)=6.$$

例 4　求 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{3}{x^3-1}\right)$.

解　当 $x\to 1$ 时,上式两项极限均不存在,可先通分再求极限.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x^3-1}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^3-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x^2+x+1}=\frac{3}{3}=1.$$

例 5　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$.

解　当 $x\to 0$ 时，分母和分子的极限均为零，不能直接使用极限的四则运算法则. 可先对分子有理化，再求极限.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}=\frac{1}{2}.$$

例 6　求下列函数的极限.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^5-3x^2+1}{4x^5+2x}$；　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+x-1}{7x^3+3}$；　(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+x+1}{5x^2-1}$.

解　(1) 当 $x\to\infty$ 时，分子、分母的极限均不存在(无穷大)，不能直接使用极限的四则运算法则. 将分子、分母同除以 x 的最高次幂 x^5，得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^5-3x^2+1}{4x^5+2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\dfrac{3}{x^3}+\dfrac{1}{x^5}}{4+\dfrac{2}{x^4}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\dfrac{3}{x^3}+\dfrac{1}{x^5}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(4+\dfrac{2}{x^4}\right)}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

(2) 分子、分母同除以 x 的最高次幂 x^3，得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x-1}{7x^3+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}}{7+\dfrac{3}{x^3}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(7+\dfrac{3}{x^3}\right)}=\frac{0}{7}=0.$$

(3) 分子、分母同除以 x 的最高次幂 x^4，得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+x+1}{5x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{x^4}}{\dfrac{5}{x^2}-\dfrac{1}{x^4}},$$

由于分子极限为 1，分母极限为 0，所以

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+x+1}{5x^2-1}=\infty.$$

一般地，当 $a_0\neq 0$，$b_0\neq 0$，m，n 为非负整数时，有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & \text{当 } n=m \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } n>m \text{ 时},\\ \infty, & \text{当 } n<m \text{ 时}.\end{cases}$$

微课

两个重要极限

3. 两个重要极限

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

这个极限的一般形式为

$$\lim_{\square\to 0}\frac{\sin\square}{\square}=1(\square\text{代表同一变量}).$$

例 7　求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}$；　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\dfrac{1}{2}x^2}$；　(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$.

解　(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}=2\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x}=2\times 1=2.$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\dfrac{1}{2}x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{\dfrac{1}{2}x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right)^2=\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right)^2=1.$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}=1.$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$

若令 $t=\dfrac{1}{x}$，则当 $x\to\infty$时，$t\to 0$，于是又可得

$$\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=\mathrm{e}\text{ 或}\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}.$$

该重要极限的一般形式为

$$\lim_{\square\to\infty}\left(1+\frac{1}{\square}\right)^{\square}=\mathrm{e}(\square\text{代表同一变量})$$

或

$$\lim_{\square\to 0}(1+\square)^{\frac{1}{\square}}=\mathrm{e}(\square\text{代表同一变量}).$$

随堂测试

例 8　求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^x$；　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$；　(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2-x}{3-x}\right)^x$.

解　(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}\cdot 3}=\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}\right]^3=\mathrm{e}^3.$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(1+\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{2}{x}}\right]^{\frac{1}{2}}=\left[\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{2}{x}}\right]^{\frac{1}{2}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}.$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2-x}{3-x}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x-3}\right)^{x-3+3}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x-3}\right)^{x-3}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x-3}\right)^3=\mathrm{e}.$

习题 1-2

1. 观察下列数列的变化趋势，写出它们的极限.

(1) $x_n=\dfrac{n+(-1)^n}{n}$；　(2) $x_n=\dfrac{n+1}{n+2}$；　(3) $x_n=2+\dfrac{1}{2^n}$；　(4) $x_n=(-1)^n\dfrac{1}{n+1}$.

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x<0,\\ x, & x>0,\end{cases}$ 求极限 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$及 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$，并判定极限$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$是否

存在.

3. 指出下列各题中,哪些是无穷小?哪些是无穷大?

(1) $y=\cot x(x\to 0)$;　　(2) $y=\mathrm{e}^{-x}(x\to+\infty)$;

(3) $y=\log_a x(a>1,x\to 0^+)$;　　(4) $y=2^x(x\to-\infty)$.

4. 利用无穷小的性质求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\sin x\cos\dfrac{1}{x}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$.

5. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 1}(x^3+2x^2-x-1)$;　(2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+4}{x+2}$;　(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+1)^2-1}{x}$;　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-2x}{4x^2+x-1}$;

(5) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{3}{x^3-1}\right)$;　(6) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$;　(7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^3-4x^2+2}{1+x^3}$;　(8) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-x+1}{x^2+2x+2}$;

(9) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2x+2}{2x^3-x+3}$;　(10) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}\right)$.

6. 求 a 的值,使函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x^2-2a, & x<0,\\ x^2-a+1, & x\geqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的极限存在.

7. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{x}$;　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x}{\sin x}$;　(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 4x}$;　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}2^n\sin\dfrac{x}{2^n}$($x$ 为非零实数);

(5) $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}+4}$;　(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x}\right)^{x+3}$;　(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x$.

8. 证明当 $x\to 0$ 时,$2x^4+x^2$ 是比 x 高阶的无穷小.

第三节　函数的连续性

自然界中许多现象的变化过程都是连续不断的,如气温、生物的生长等都是随着时间连续变化的,这种现象反映在数学上就是函数的连续性.

一、函数连续的概念

为了建立函数连续性的定义,首先引入增量的概念.

定义 17　设函数 $y=f(x)$在点 x_0 的某个邻域内有定义,当自变量由 x_0 变到 x(x 仍在该邻域内)时,称差 $x-x_0$ 为自变量在 x_0 处的**增量**,记为 Δx,即 $\Delta x=x-x_0$.相应地,函数值由 $f(x_0)$变到 $f(x)$,称差 $f(x)-f(x_0)$为函数 $f(x)$在 x_0 处的**增量**,记为 Δy,即

$$\Delta y=f(x)-f(x_0)\text{或 }\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0).$$

函数增量的几何意义如图 1-3 所示.

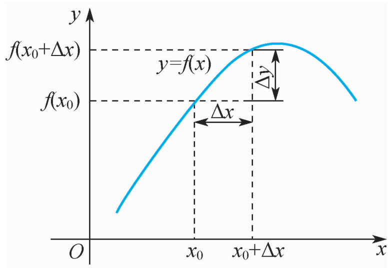


图 1-3

例 1　设函数 $y=f(x)=x^2$.

(1) 当 x 从 -1 改变到 2 时，求自变量的增量与函数的增量；

(2) 当 x 从 x_0 改变到 $x_0+\Delta x$ 时，求函数的增量.

解　(1) 自变量的增量 $\Delta x=2-(-1)=3$，函数的增量

$$\Delta y=f(2)-f(-1)=2^2-(-1)^2=3.$$

(2) $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=(x_0+\Delta x)^2-x_0^2=(2x_0+\Delta x)\Delta x$.

从自变量的增量与函数的增量的关系出发，下面给出函数在某点处连续的定义.

定义 18　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，若当自变量的增量 $\Delta x=x-x_0$ 趋于零时，对应的函数增量也趋于零，即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0,$$

则称函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处**连续**，x_0 称为函数 $f(x)$ 的**连续点**.

若令 $x_0+\Delta x=x$，当 $\Delta x\to 0$ 时，$x\to x_0$，则有

$$\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=\lim_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=0,$$

即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

微课
函数在一点的连续性

于是，函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续的定义又可叙述如下.

定义 19　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处**连续**.

例 2　证明函数 $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续.

证　因为 $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0=f(0)$，故函数 $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续.

如果 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处**左连续**；如果 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$，则

称函数 $f(x)$在点 x_0 处**右连续**. 显然,函数 $f(x)$在点 x_0 处连续的充分必要条件是它在点 x_0 处既左连续,又右连续.

综上所述,函数 $f(x)$在点 x_0 处连续,必须同时满足以下三个条件:

(1) 函数 $f(x)$在点 x_0 的某个邻域内有定义;

(2) 函数 $f(x)$的极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在;

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

若以上三条中有一条不满足,函数 $f(x)$就在点 x_0 处间断(即不连续),点 x_0 称为函数 $f(x)$的**间断点**. 例如,$x=0$ 是函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$的间断点.

例 3 判定函数 $f(x)=\begin{cases}x^3+1, & x<0,\\ 3x+1, & x\geqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解 因为 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x^3+1)=1$, $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(3x+1)=1$,且 $f(0)=1$,于是

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=f(0),$$

所以 $f(x)$在 $x=0$ 处左连续且右连续,从而 $f(x)$在 $x=0$ 处连续.

若函数 $f(x)$在区间(a,b)内的每一点都连续,则称函数 $f(x)$在区间(a,b)内**连续**,或称 $f(x)$是区间(a,b)内的**连续函数**;若函数 $f(x)$在区间(a,b)内连续,且在左端点 a 处右连续,在右端点 b 处左连续,则称函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上**连续**,此时也称 $f(x)$是闭区间$[a,b]$上的**连续函数**.

二、连续函数的运算与性质

1. 连续函数的运算

定理 6 两个连续函数的和、差、积、商(分母不为零)仍为连续函数,两个连续函数的复合函数也是连续函数.

由于所有的基本初等函数在其定义域内都是连续的,结合定理 6,得出下面的结论.

定理 7 所有的初等函数在其定义区间(包含在定义域内的区间)上都是连续函数.

由初等函数的连续性知,若 $f(x)$是初等函数,且 x_0 是 $f(x)$的定义区间内的点,则 $f(x)$在 $x\to x_0$ 时的极限值等于 $f(x)$在 x_0 处的函数值,即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

例 4 求 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin x}{\mathrm{e}^x\sqrt{1+x^2}}$.

解 因为 $f(x)=\dfrac{\sin x}{\mathrm{e}^x\sqrt{1+x^2}}$是初等函数,且在 $x=2$ 处有定义,所以

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sin x}{\mathrm{e}^x\sqrt{1+x^2}}=\frac{\sin 2}{\mathrm{e}^2\sqrt{1+2^2}}=\frac{\sin 2}{\mathrm{e}^2\sqrt{5}}.$$

例 5　求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(x+1)}{x}$.

解　$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(x+1)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\ln(x+1)^{\frac{1}{x}}=\ln\lim\limits_{x\to0}(x+1)^{\frac{1}{x}}=\ln \mathrm{e}=1$.

注意　对于连续函数，极限符号与函数符号可以交换运算次序.

2. 闭区间上连续函数的性质

定义在闭区间上的连续函数，在理论和应用中有很多重要的性质. 下面将对这些性质给予简单的介绍.

定义 20　对于在区间 I 上有定义的函数 $f(x)$，如果有 $x_0\in I$，使得对于任一 $x\in I$ 都有

$$f(x)\leqslant f(x_0)\,(f(x)\geqslant f(x_0)),$$

则称 $f(x_0)$是函数 $f(x)$在区间 I 上的**最大值**(**最小值**).

定理 8(最值定理)　闭区间上的连续函数在该区间上一定存在最大值和最小值.

如图 1-4 所示，函数 $y=f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，在点 ξ_1 处取得最大值，在点 ξ_2 处取得最小值.

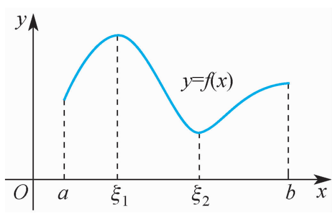


图 1-4

推论(有界性定理)　闭区间上的连续函数在该区间上一定有界.

定理 9(介值定理)　设函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，且 $f(a)\neq f(b)$，C 为介于 $f(a)$与 $f(b)$之间的任何数，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=C$.

如图 1-5 所示，对介于 $f(a)$与 $f(b)$之间的任何一个数 C，直线 $y=C$ 与连续曲线 $y=f(x)$有三个交点，使得 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=f(\xi_3)=C$.

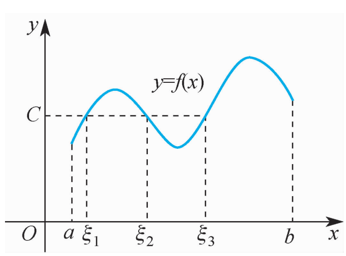


图 1-5

随堂测试

推论(零点定理) 设函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,且 $f(a)\cdot f(b)<0$,则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得 $f(\xi)=0$.

如图 1-6 所示,连续曲线 $y=f(x)$满足 $f(a)<0$,$f(b)>0$,那么曲线与 x 轴必有交点 $\xi\in(a,b)$,这时有 $f(\xi)=0$.

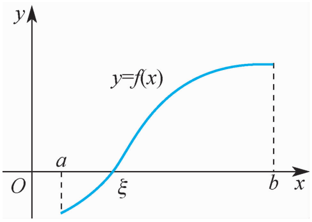


图 1-6

例 6 证明方程 $x^3-4x^2+1=0$ 在区间$(0,1)$内至少有一个实根.

证 函数 $f(x)=x^3-4x^2+1$ 在闭区间$[0,1]$上连续,又 $f(0)=1>0$,$f(1)=-2<0$. 根据零点定理,在区间$(0,1)$内至少有一点 ξ,使得 $f(\xi)=0$. 因此,方程 $x^3-4x^2+1=0$ 在区间$(0,1)$内至少有一个实根.

习题 1-3

1. 设函数 $y=2x^2-1$,当 x 从 $x_1=1$ 改变到 $x_2=\dfrac{1}{2}$时,求自变量的增量与函数的增量.

2. 已知某产品的生产函数 $y=x+4x^2-0.2x^3$,其中 y 是产量,x 是原料的投放量. 问:当 $x=10$ 个单位时,再继续投放 1 个单位的原料,产量的增量 Δy 是多少?

3. 讨论下列分段函数在分段点处的连续性.

(1) $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\leqslant 2, \\ 2+x, & x>2; \end{cases}$　(2) $f(x)=\begin{cases} x, & |x|\leqslant 1, \\ 1, & |x|>1; \end{cases}$

(3) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x<0, \\ \sin x, & x\geqslant 0; \end{cases}$　(4) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin 2x}{x}, & x\neq 0, \\ 1, & x=0. \end{cases}$

4. 设函数 $f(x)=\begin{cases} e^x+a, & x\geqslant 0, \\ x\sin\dfrac{1}{x}, & x<0, \end{cases}$ 试确定常数 a 的值,使 $f(x)$在点 $x=0$ 处连续.

5. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\ln\cos x$;　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}$$(a>0$ 且 $a\neq 1)$;

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+x)-\ln x}{x}$;　(4) $\lim\limits_{t\to -2}\dfrac{e^t+1}{t}$.

6. 证明方程 $x^3+2x-6=0$ 至少有一个根介于 1 和 3 之间.

复习题一

A　组

一、填空题

1. 函数 $f(x)=\sqrt{9-x^2}+\ln(x-1)$的定义域为________.

2. 若 $f(x)$是以 2 为周期的周期函数，且在闭区间$[0,2]$上 $f(x)=2x-x^2$，则在闭区间$[2,4]$上，$f(x)=$________.

3. $f(x)=\begin{cases} x^2-9, & 0\leqslant x<3, \\ x^2, & -3\leqslant x<0 \end{cases}$ 的反函数是________.

4. 设 $f(x)=\ln x, g(x)=\sin x$，则 $f[g(x)]=$________，$g[f(x)]=$________.

5. $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}=$________，$\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{1}{x}=$________.

6. 设$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-ax+4}{x-1}=-3$，则 $a=$________.

7. 设 $f(x)$在 $x=1$ 处连续，且$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-2}{x-1}=1$，则 $f(1)=$________.

8. 设函数 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{1-x}, & x<0, \\ 0, & x=0, \\ x, & 0<x<1, \\ 1, & 1\leqslant x<2, \end{cases}$ 则 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=$________，$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=$________，$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=$________，$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=$________，间断点为________.

二、选择题

1. 函数 $f(x)=\begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & |x|\leqslant 1, \\ \sqrt{x^2-1}, & |x|>1 \end{cases}$ 的定义域是(　　).

A. $[-1,1]$　　B. $(-\infty,+\infty)$　　C. $(-1,1)$　　D. $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

2. 函数 $y=\lg(x-1)$在区间(　　)内有界.

A. $(1,+\infty)$　　B. $(2,+\infty)$　　C. $(1,2)$　　D. $(2,3)$

3. 下列函数中，为偶函数且在$(-\infty,0)$内单调减少的是(　　).

A. $y=x^2+2x+2$　　B. $y=1-x^2$　　C. $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{|x|}$　　D. $y=\log_2|x|$

4. 下列函数为复合函数的是(　　).

A. $e^x+\sin x$　　B. $\sin\sqrt{x}$　　C. $-2+\cos x$　　D. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$

5. 当 $x\to 0$ 时，下列变量为无穷小的是(　　).

A. e^{x^2}　　B. $\dfrac{x-1}{x+1}$　　C. $\sin^2 x$　　D. $\cos\dfrac{1}{x}$

6. 当 $x\to 0$ 时，$\sin x$ 与 x 相比是(　　).

A. 高阶无穷小　　B. 低阶无穷小　　C. 等价无穷小　　D. 以上都不对

7. $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$是函数 $f(x)$在点 x_0 处连续的(　　).

A. 充分条件且不是必要条件　　B. 必要条件且不是充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不是充分条件也不是必要条件

8. 如果函数 $y=f(x)$在点 x_0 处间断,则(　　).

A. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$不存在　　B. $f(x_0)$不存在

C. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$　　D. 以上三种情况至少有一种发生

三、综合题

1. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x-1|}{x-1}, & x\neq 1,\\ a, & x=1,\end{cases}$ 且 $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=a$,求 a 的值.

2. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x}\arctan x$;　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$;　(3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3}}{x-1}$;　(4) $\lim\limits_{x\to\infty} x\tan\dfrac{1}{x}$;

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\sqrt{1+x^2}}$;　(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^{\sqrt{2}x}$;　(7) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}$;　(8) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-3x^2-1}{x^2+x}$.

3. 已知 $f(x)=\begin{cases}a+x^2, & x<0,\\ 1, & x=0,\\ \ln(b+x+x^2), & x>0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,试确定 a 和 b 的值.

4. 证明方程 $x-2\sin x=1$ 至少有一个小于 3 的正根.

5. 某工厂生产某种产品的总成本函数为 $C(q)=q^3-9q^2+33q+10$,该产品的需求函数为 $q=75-p$(p 为价格),求:(1)产量为 10 时的平均成本;(2)产量为 10 时的利润.

6. 某公司生产某产品 q 件时,固定成本为 2 000 元,生产一件产品的变动成本为 28 元,每件产品的售价为 p 元,又需求函数为 $q=150-2p$,求利润函数.

B　组

1. 设$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax+b}{x-1}=3$,求 a,b 的值.

2. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt{2}-2\cos x}{\tan^2 x}$;　(2) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{\pi^2-x^2}$.

3. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x}{x}, & x>0,\\ x^2-2x+k, & x\leqslant 0,\end{cases}$ 当 k 取何值时,函数 $f(x)$在其定义域内连续?

4. 小明到南岳观日出,早上 8 时从山下一宾馆出发,沿一条路径上山,下午 5 时到达山顶并留宿于山顶一宾馆. 次日观日出后,于早上 8 时沿同一路径下山,下午 5 时回到山下同一宾馆. 试用零点定理分析:小明必在两天内的同一时刻经过某一地点.